Université Paris Nord Année 2014/2015

L2 Mathématiques et MIEF.

Partiel de Probabilités

(3 heures, sans document, sans calculatrice, sujet recto-verso)

Le sujet est assez long afin de vous permettre de ne pas rester bloqué sur une question. Le dernier exercice est sur 5 points, et il n'est pas nécessaire de le traiter pour avoir 20/20.

Exercice 1 (L'urne inconnue) On dispose de deux urnes. L'urne I contient 7 boules noires et 3 boules blanches, l'urne II contient 7 boules blanches et 3 boules noires.

0) Soient A et B des événements. Démontrer la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_B(A)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}_{B^c}(A)\mathbb{P}(B^c).$$

Rappeler et démontrer la formule de Bayes.

1) **Première expérience** : Soit $p \in]0, 1[$. On choisit l'urne I avec probabilité p, et l'urne II avec probabilité $1 - p$. On tire alors une boule dans l'urne choisie :
   1. Quelle est la probabilité en fonction de p d'avoir une boule blanche ?
   2. Sachant qu'on a tiré une boule blanche quelle est la probabilité (en fonction de p) d'avoir choisi l'urne II ?

2) **Deuxième expérience** : On tire uniformément une boule de l'urne I, puis on la place dans l'urne II. On tire alors une boule de l'urne II, quelle est la probabilité d'avoir une boule noire ?

Exercice 2 (Dé à sept faces) Soit n un entier supérieur ou égal à 1.

1) On lance un dé équilibré à 7 faces numérotées de 1 à 7. Donner un univers associé à l'expérience aléatoire et calculer la probabilité d'avoir un chiffre impair.

2) On lance, de façon indépendante, n fois deux dés équilibrés à 7 faces . Calculer la probabilité de l'événement

$$A = \text{« on a au moins un double sept »}.$$

Démontrer que pour avoir une probabilité supérieure ou égale à 9/10 d'obtenir au moins un double 7, il faut et il suffit que :

$$n \geq \frac{\ln(10)}{\ln(49) - \ln(48)}.$$

Exercice 3 (Les 15 clefs) 1) Soit $q \neq 1$ et des entiers n_0, n tels que $n_0 \leq n$. Montrer que

$$(1-q)\sum_{k=n_0}^{n} q^k = q^{n_0}(1 - q^{n-n_0+1})$$

En déduire la formule de la somme géométrique.

2) Soit maintenant $q \in]0,1[$, et X une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre q, c'est-à-dire pour tout $k \geq 1$,

$$\mathbb{P}(X = k) = q(1-q)^{k-1}.$$

Vérifier que la famille de réels $(p_k = q(1-q)^{k-1}, k \geq 1)$ est une probabilité sur l'ensemble $\mathbb{N}^\star$.

3) Un trousseau de clefs comporte 15 clefs, dont une seule ouvre la porte. on prend une clef au hasard, l'essaie, et la laisse sur le trousseau si elle n'ouvre pas, et ainsi de suite. Soit X la variable aléatoire égale aux nombres d'essais (y compris le bon) avant succès. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X. Montrer que X suit une loi géométrique, déterminer son paramètre.

5) On change de méthode : on prend une clef au hasard, l'essaie, la met de côté si elle n'ouvre pas, et ainsi de suite. Soit Y la variable aléatoire égale aux nombres d'essais (y compris le bon) avant succès. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par Y, montrer que Y suit la loi uniforme sur $[|1, 15|]$: c'est à dire que pour tout $k \in [|1, 15|]$, $\mathbb{P}(Y = k) = \frac{1}{15}$.

6) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, montrer que $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. En déduire l'espérance de Y.

7) On rappelle que l'espérance d'une loi géométrique de paramètre p est $\frac{1}{p}$. Combien d'essais en moyenne doit-on faire pour tomber sur la bonne clef lorsque l'on remet la clef dans le trousseau ? Même chose lorsque l'on ne la remet pas.

Exercice 4 (Calculs binomiaux) On considère un serveur informatique consommant 500 watts. On équipe le serveur de plusieurs exemplaires d'un même composant afin d'améliorer sa sûreté de fonctionnement. On étudie deux configurations :

(I) **Configuration I** : On met 3 alimentations de 300 watts chacune.
(II) **Configuration II** : Le serveur dispose de 4 disques durs et continue à fonctionner avec au plus un disque dur en panne.

1) Soit un serveur avec la configuration (I). Le nombre d'alimentations en panne est noté N_A. On suppose qu'aucun composant différent des alimentations ne peut tomber en panne. Justifier que la probabilité de panne (notée $P_A(p)$) est donnée par $\mathbb{P}(N_A \geq 2)$. N_A a une loi binomiale de paramètre $(3, p)$. Calculer $P_A(p)$.

2) Soit un serveur en configuration (II).
On suppose qu'aucun composant différent des disques durs ne peut tomber en panne. Le nombre de disques durs en panne N_D suit la loi binomiale de paramètre $(4, q)$. Montrer que la probabilité que le serveur tombe en panne (notée $P_D(q)$) vérifie

$$P_D(q) = q^2(3q^2 - 8q + 6).$$

3) On suppose $p = q$. En étudiant le signe de la fonction $p \mapsto P_A(p) - P_D(p)$, décider quelle configuration parmi (I) et (II) est la plus fiable.