Chapitre I   Suites, fonctions et résolution d'équations non-linéaires

On utilisera dans ce cours à répétition les notions de limite de suites et de limite de fonctions en un point. On verra lors de l'étude des séries entières et des calculs approchés d'intégrales que les développements de Taylor jouent un rôle primordial..

On commence par quelques théorèmes fondamentaux sur les suites et les fonctions

I.1 Suites et fonctions

Définition : On dit qu'une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente s'il existe un réel ℓ tel que pour tout intervalle contenant ℓ (aussi petit soit l'intervalle) à partir d'un certain rang les réels u_n appartiennent à cet intervalle.

Théorème de la limite monotone : Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle.

① si elle est
- croissante (c'est-à-dire : $\forall n\geq 1 \quad u_{n+1}\geq u_n$).
- majorée (c'est-à-dire : $\exists M\in\mathbb{R} ;\ \forall n\geq 1 \quad u_n\leq M$)

alors elle converge

② si elle est croissante non majorée alors elle tend vers $+\infty$

③ si elle est
- décroissante (c'est-à-dire $\forall n\geq 1 \quad u_{n+1}\leq u_n$)
- minorée (c'est-à-dire $\exists m\in\mathbb{R} ;\ \forall n\geq 1 \quad u_n\geq m$)

alors elle converge

④ si elle est décroissante non minorée alors elle tend vers $-\infty$.

Théorème des suites adjacentes : Soient $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ deux suites réelles

telles que :
- $\forall n\geq 1 \quad u_n\leq v_n$
- $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante et $(v_n)_{n\geq 1}$ est décroissante
- $v_n - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

alors (u_n) et (v_n) convergent et ont même limite

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n}.$$

Définition Une fonction f est k-lipschitzienne sur un intervalle I si pour tous $x, y \in I$ $\quad |f(x) - f(y)| \leq k|x-y|$.

Lorsque $k < 1$, on dit que la fonction f est contractante.

Définition Une suite récurrente est une suite définie par

- un terme initial u_0
- une relation $u_{n+1} = f(u_n)$.

> **Théorème du point fixe :**
> Supposons f contractante, $f([a,b]) \subset [a,b]$, et $u_0 \in [a,b]$. La suite (u_n) converge vers l'unique réel ℓ solution de l'équation $f(\ell) = \ell$ (équation du point fixe).

Remarque : Il n'est pas toujours évident qu'une suite vérifiant une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien définie, il faut s'assurer que $u_{n+1} = f(u_n)$ reste dans le domaine de définition de f, pour tout $n \geq 0$. (on n'insistera pas sur ce point).

(rajouter le cas g croissante, $g([a,b]) \subset [a,b] \Rightarrow (x_n)$ croissante majorée, donc convergente.

Vous avez vu en harmonisation la formule de Taylor-Young pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^n$:

formule de Taylor-Young :

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + f^{(2)}(a)\frac{h^2}{2} + \dots + f^{(n)}(a)\frac{h^n}{n!} + h^n \varepsilon(h)$$

avec $\varepsilon(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$.

On aura besoin de connaître plus précisément ε afin par exemple de contrôler l'erreur lors de calculs approchés d'intégrale : Pour cela, on dispose du développement de Taylor-Maclaurin

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I : pour tout $a \in I$ et h tel que $a+h \in I$: il existe $\theta \in]0,1[$ tel que

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + \frac{f^{(n+1)}(a+\theta h)}{(n+1)!} h^{n+1}.$$

Autrement dit lorsque f admet une dérivée d'ordre $(n+1)$ continue la fonction $\mathcal{E}$ dans la formule de Taylor-Young s'écrit

$$\mathcal{E}(h) = \frac{h\, f^{(n+1)}(a+\theta h)}{(n+1)!}$$

Remarques: • $\mathcal{E}(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$ car $\frac{f^{(n+1)}(a+\theta h)}{(n+1)!} \xrightarrow[h\to 0]{} \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}$ par continuité de $f^{(n+1)}$.

• Si $n=0$, on retrouve la formule de Taylor : $\exists \theta \in]0,1[$, tq $f(a+h) = f(a) + f'(a+\theta h)\, h$

Inégalité de Taylor-Lagrange

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle $]a,b[$. On suppose qu'il existe M tel que pour tout $x \in I$, $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$.

alors :

$$\boxed{\forall x_1 \in]a,b[,\ \forall x_2 \in]a,b[\quad \left| f(x_2) - f(x_1) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(x_2-x_1)^k}{k!} f^{(k)}(x_1) \right| \leq M \frac{|x_2-x_1|^{n+1}}{(n+1)!}}$$

Preuve : Cela découle directement du développement de Taylor-MacLaurin.

I.2 Résolution d'équations non linéaires

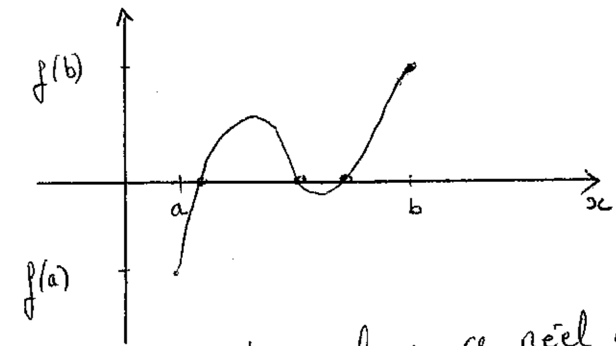
L'objectif est de donner une approximation de la solution de l'équation $f(x) = 0$ où f est une fonction donnée.

Dans le cas où f est une fonction affine c'est-à-dire de la forme $f(x) = ax+b$ il n'y a aucune difficulté : $f(x) = 0$ a pour solution $x = -\frac{b}{a}$. et on obtient une valeur approchée de cette solution par des opérations élémentaires de calcul. La situation est plus compliquée lorsque f n'est pas linéaire : Chercher à résoudre l'équation $x^2 - 2 = 0$ conduit aux calculs de $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$, plus difficile à approcher numériquement.

Autre exemple, on peut s'intéresser à l'équation $e^{-\alpha x} - x = 0$ pour $\alpha \in]0,1[$.

Le problème ici est de montrer l'existence d'une solution, et de trouver une méthode pour l'approcher.

Théorème des valeurs intermédiaires : Soit f une fonction continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Supposons que $f(a)\,f(b) < 0$, alors il existe $\alpha \in]a,b[$ tel que $f(\alpha)=0$.



sur le dessin, on voit qu'il y a trois racines à l'équation $f(x)=0$.

Si f est strictement monotone alors ce réel α est unique.

On supposera dans toute la suite que f admet une unique racine sur $I=]a,b[$. On note cette racine α.

I.2.1 Méthode de dichotomie

Cette méthode consiste à construire une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ convergente vers α de la manière suivante :

Initialisation : on prend pour x_0 le milieu de $[a,b]$. La racine se trouve alors dans l'un des deux intervalles $]a,x_0[$ ou $]x_0,b[$, ou bien est égale à x_0.

- Si $f(a)\,f(x_0) < 0$ alors $\alpha \in]a,x_0[$ et on pose $a_1 = a$, $b_1 = x_0$
- Si $f(a)\,f(x_0) > 0$ alors $\alpha \in]x_0,b[$ et on pose $a_1 = x_0$, $b_1 = b$

On prend alors x_1 le milieu de $[a_1,b_1]$. et ainsi de suite :

On construit de cette façon une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$\boxed{x_n = \frac{a_n+b_n}{2}} \quad \text{pour tout } n \geq 0.$$

Par construction $|x_n-\alpha| \leq \dfrac{b_n-a_n}{2}$ et $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$

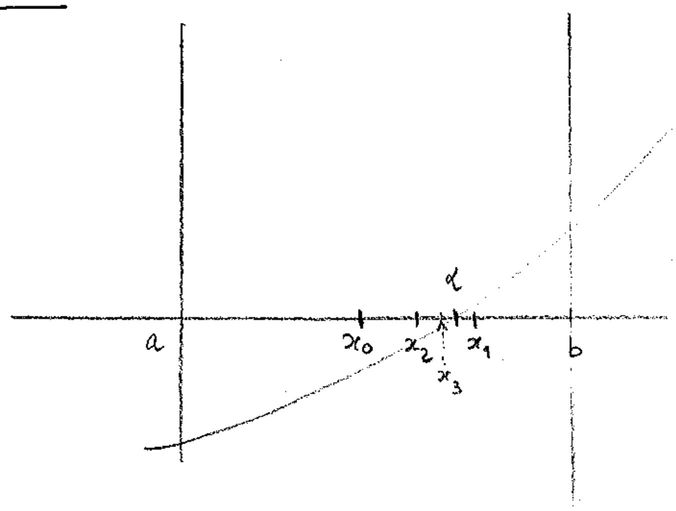
donc $$\boxed{|x_n-\alpha| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}}}$$

Théorème I.2.1 : $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha$

Etant donnée une précision ε, cette méthode permet d'approcher α en un nombre prévisible d'itérations : il suffit en effet de choisir n tel que $\dfrac{b-a}{2^{n+1}} \leq \varepsilon$

donc : $$n \geq \frac{\ln\left(\frac{b-a}{2\varepsilon}\right)}{\ln 2} = \log_2\left(\frac{b-a}{2\varepsilon}\right).$$

Dichotomie



Les principes de construction suivants consistent à transformer l'équation $f(x)=0$ en une équation équivalente de point fixe $g(x) = x$.

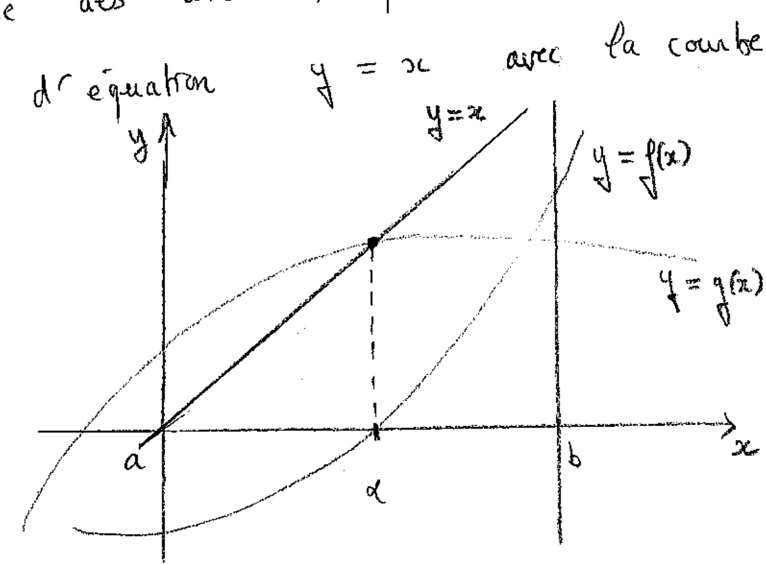
On peut par exemple poser $g(x) = f(x) + x$, ou plus généralement $g(x) = x + u(x) f(x)$ où u est une fonction non nulle sur I.

La stratégie est de choisir cette fonction u de sorte que la suite récurrente définie par

$$\begin{cases} x_0 \in I \\ x_{n+1} = x_n + u(x_n) f(x_n) \end{cases}$$

soit bien définie et converge vers α.

géométriquement, on a remplacé la recherche de l'intersection du graphe de f avec l'axe des abscisses, par la recherche du point d'intersection de la droite d'équation $y = x$ avec la courbe d'équation $y = g(x)$.



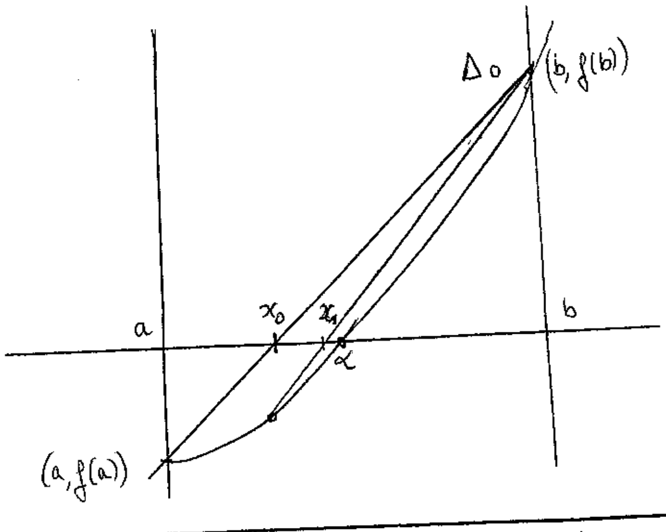
I.2.2 Méthode de la sécante (aussi appelée méthode de Lagrange)

Proposition : Soit f de classe C^2 sur $[a,b]$, on suppose que $f(a)f(b)<0$ et que $f'(x)>0$ pour tout $x \in [a,b]$, alors l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution dans $[a,b]$.

La méthode consiste à construire (x_n) de la façon suivante : on note Δ_0 la droite passant par $(a, f(a))$, $(b, f(b))$. Cette droite coupe l'axe des abscisses en un point $x_0 \in]a,b[$:

- Si $f(x_0)f(a) < 0$ alors $\alpha \in]a, x_0[$ et on considère la droite passant par $(a, f(a))$, $(x_0, f(x_0))$.
- Si $f(x_0)f(a) > 0$ alors $\alpha \in]x_0, b[$ et on considère la droite passant par $(x_0, f(x_0))$, $(b, f(b))$.

Dans les deux cas, on appelle x_1 l'abscisse du point d'intersection de cette droite avec l'axe Ox. On réitère le procédé et on construit ainsi $(x_n)_{n\geq 0}$.



Théorème I.2.2 La suite $(x_n)_{n\geq 0}$ ainsi définie converge vers α.
Dans le cas d'une fonction convexe (c'est-à-dire en dessous de ses cordes), on a

$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_{n+1} = \dfrac{b\, f(x_n) - x_n f(b)}{f(x_n) - f(b)} \end{cases}$$

Preuve (éléments) Lorsque f est convexe, on voit que la racine α est toujours à droite de x_n. On considère donc x_{n+1} comme le point d'intersection de la droite

$$y = f(x_n) + \frac{f(x_n) - f(b)}{x_n - b}(x - b) \quad \text{et} \quad y = 0$$

d'où : $(x_{n+1}-b)\dfrac{f(x_n)-f(b)}{x_n-b}+f(b)=0$

et $x_{n+1} = -f(b)\dfrac{x_n-b}{f(x_n)-f(b)} + b = \dfrac{bf(x_n)-x_nf(b)}{f(x_n)-f(b)}$.

Une étude de la fonction $g(x)=\dfrac{bf(x)-xf(b)}{f(x)-f(b)}$ montre qu'elle est croissante et que l'on a $g([a,b]) \subset [a,b]$. On en déduit que la suite récurrente (x_n) est croissante majorée et donc qu'elle converge. Par continuité de g la limite de $(x_n)_{n\geq 0}$ est un point fixe de g. On conclut en vérifiant que

$g(x) = x \iff f(x) = 0$. $\square$.

Vitesse de convergence de la méthode de la sécante

Par la formule de Taylor, il existe $\theta_n \in]0,1[$ tel que

$$g(x_n) = g(\alpha + x_n - \alpha) = g(\alpha) + g'(\alpha+\theta_n(x_n-\alpha))(x_n-\alpha).$$

On a $x_n \leqslant \alpha + \theta_n(x_n-\alpha) \leqslant \alpha$ donc $\theta_n(x_n-\alpha) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

on en déduit $\dfrac{x_{n+1}-\alpha}{x_n-\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} g'(\alpha) = 1 - \dfrac{(b-\alpha)f'(\alpha)}{f(b)}$

La convergence est dite d'ordre 1.

I.2.3 Méthode de Newton

Le résultat $\dfrac{x_{n+1}-\alpha}{x_n-\alpha} \to g'(\alpha)$ est vrai pour toute fonction g : pour obtenir une convergence plus rapide, on peut chercher $g(x) = x + u(x)f(x)$ telle que $g'(\alpha)=0$.

On a ainsi $g'(x) = 1 + u'(x)f(x) + u(x)f'(x)$

on en déduit $g'(\alpha) = 0 \iff u(\alpha) = -\dfrac{1}{f'(\alpha)}$.

Si la fonction f' ne s'annule, on peut choisir $u(x) = -\dfrac{1}{f'(x)}$. On obtient alors la méthode de Newton.

Théorème I.2.3 Supposons f de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(a)f(b)<0$, on suppose que $f'(x)f''(x)>0$ pour tout $x\in[a,b]$

La suite
$$\begin{cases} x_0 = b \quad \text{si } f'(x)>0 \text{ et } f''(x)>0, \quad x_0 = a \text{ si } f'(x)<0 \text{ et } f''(x)<0. \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$$

est bien définie et converge vers α, ~~unique~~ unique racine de f sur $[a,b]$.

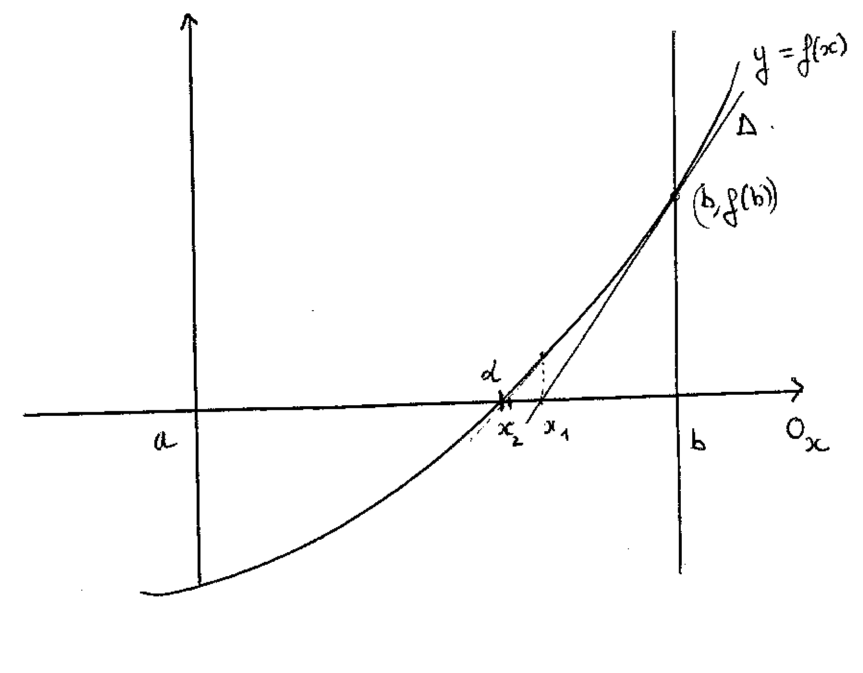
<u>Vitesse de convergence</u> : on a fait en sorte que $\left|\dfrac{x_{n+1}-\alpha}{x_n-\alpha}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

on a de plus $\dfrac{|x_{n+1}-\alpha|}{|x_n-\alpha|^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{2}\dfrac{f^{(2)}(\alpha)}{f'(\alpha)}$.

On obtient ce résultat en appliquant la formule de Taylor-MacLaurin à l'ordre 2, et en remarquant que $g^{(2)}(\alpha) = \dfrac{1}{2}\dfrac{f^{(2)}(\alpha)}{f'(\alpha)}$.

on dit que la méthode de Newton est d'ordre 2.

<u>Interprétation graphique</u>



- on trace la tangente à la courbe de f passant par $f(b)$: c'est la droite d'équation : Δ_1 : $y = f'(b)(x-b)+f(b)$.
on appelle x_1 le point d'intersection de Δ et O_x : on a donc
$$f'(b)(x_1-b)+f(b)=0$$
c'est à dire $x_1 = b - \dfrac{f(b)}{f'(b)}$.
- on trace la tangente à la courbe passant par $f(x_1)$. on appelle x_2 le point d'intersection.

on itère le procédé.

Etude d'un exemple

L'objectif de l'exercice est de calculer la racine cubique d'un nombre positif $a > 0$

Soit g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\frac{a}{x^2}$ a étant fixé.

1) Etudier g et comparer g à l'identité

2) Soit la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_{n+1} = g(x_n)$ et $x_0 > 0$.

A l'aide du théorème du point fixe, montrer que cette suite converge et déterminer sa limite.

3) Expliciter la méthode de Newton pour la recherche du zéro de la fonction $f(x) = x^3 - a$. Que remarque-t-on ?

① $\lim_{x \to 0} g(x) = +\infty$, $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = \frac{2}{3}$ et $\lim_{x \to +\infty} \left(g(x) - \frac{2}{3}x\right) = 0$

donc la droite $y = \frac{2}{3}x$ est une asymptote.

$$g'(x) = \frac{2}{3} + \frac{a}{3} \times \left(-2x^{-3}\right) = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\frac{a}{x^3} = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{a}{x^3}\right) = \frac{2}{3x^3}\left(x^3 - a\right).$$

donc g est croissante sur $[\sqrt[3]{a}, +\infty[$ et décroissante sur $]0, \sqrt[3]{a}[$.

on a $g'(\sqrt[3]{a}) = 0$ donc $\sqrt[3]{a}$ est un minimum (il est global).

de plus $g(\sqrt[3]{a}) = \frac{2}{3}\sqrt[3]{a} + \frac{1}{3}\frac{a}{a^{2/3}} = \frac{2}{3}a^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}a^{1/3} = a^{1/3}$

Tableau de variation :

x	0		$\sqrt[3]{a}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt[3]{a}$	$\nearrow$	$+\infty$

Etudions : $x \mapsto g(x) - x$

$$g(x) - x = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\frac{a}{x^2} = \frac{1}{3}\left(\frac{a}{x^2} - x\right).$$

$\frac{a}{x^2} - x \geq 0 \iff x \leq \sqrt[3]{a}$. Le seul point d'intersection entre la courbe $y = g(x)$ et $y = x$ est $(\sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{a})$.

2) Pour appliquer le théorème du point fixe, on vérifie que g est une fonction contractante.

Par la formule de Taylor : $g(x) - g(y) = g'(\theta)(x-y)$.

pour un certain θ entre y et x.

donc $|g(x) - g(y)| \leq |g'(\theta)|\,|x-y|$.

on a calculé $g'(\theta) = \dfrac{2\theta^3 - a}{3\theta^3} \leq \dfrac{2}{3}$; donc g est $\frac{2}{3}$-lipschitzi

par le théorème du point fixe $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$ où ℓ est l'unique point fixe de g, c'est-à-dire $\ell = \sqrt[3]{a}$.

3) La méthode de Newton pour déterminer la solution de l'équation $f(x) = x^3 - a = 0$ consiste à considérer la suite récurrente

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

on a $f'(x) = 3x^2$ donc $x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n^3 - a}{3x_n^2}$

$$= \frac{2}{3}x_n + \frac{a}{3x_n^2}$$

on reconnait donc la suite étudiée précédemment.

⚠. pour utiliser le théorème donnant la convergence de la méthode de Newton

on doit vérifier que $f'(x) f''(x) \geq 0$ pour tout x.

Or $f''(x) = 6x$. donc $f'(x) f''(x) = 18x^3 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

L'énoncé du théorème indique x_0 doit être pris égal à b. Ici on peut choisir par exemple : $a \geq \sqrt[3]{a}$! La première partie montre cependant que cela n'est pas nécessaire pour que la suite converge.

Chapitre II : Séries numériques et séries entières

II.1 Séries numériques : définitions et exemples

Définition 2.1 On appelle série numérique, la suite réelle $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

où $(u_k)_{k\geq 0}$ désigne une suite réelle appelée terme général de la série

. On dit que la série converge (diverge) si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (diverge)

. On appelle somme partielle de rang n, le réel S_n.

. On notera $\sum_{n\geq 0} u_n$ la série et si celle-ci converge ou diverge vers $+\infty$

on notera sa limite $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ (qui vaut éventuellement $+\infty$).

Définition 2.2 Deux séries sont dites de même nature si et seulement si elles sont toutes deux convergentes ou toutes deux divergentes.

Exemples :

1) Série géométrique

Soit $q \in \mathbb{R}^*$, on s'intéresse à la série $\sum_{n\geq 0} q^n$.

On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = 1+q+q^2+\dots+q^n$

si $q=1$ alors $S_n = \sum_{k=0}^{n} 1 = (n+1)$ et $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$.

si $q \neq 1$ alors $S_n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ pour tout n (voir (*))

• Si $|q|<1$, alors $q^{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et $(S_n)_{n\geq 1}$ converge vers $\dfrac{1}{1-q}$

Autrement dit, la série converge et sa somme est $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \dfrac{1}{1-q}$

. Si $q>1$ alors $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

. Si $q<-1$ alors (q^n) diverge et (S_n) aussi.

(*)
$$(1-q)(1+q+\dots+q^n)$$
$$= 1+q+\dots+q^n$$
$$-q-q^2-\dots-q^n-q^{n+1}$$
$$= 1-q^{n+1}.$$

2) Série exponentielle

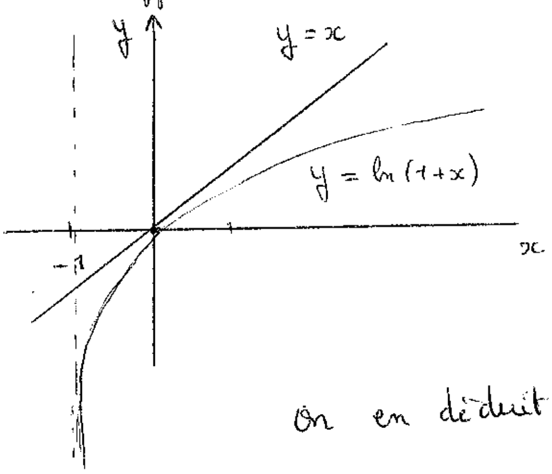
Soit $x \in \mathbb{R}$, on rappelle la formule $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

Il s'agit d'un exemple fondamental de série entière, on y reviendra.

3) Série harmonique

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ est appelée série harmonique. Cette série diverge vers $+\infty$; on notera $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.

preuve : L'inégalité $\ln(1+x) \leq x$ est vraie pour tout $x \in]-1, +\infty[$.
(Il suffit d'étudier la fonction $x \mapsto x - \ln(1+x)$ sur $]-1, +\infty[$).



On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{1}{n} \geq \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln(n)$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{n} \left(\ln(k+1) - \ln(k)\right) \overset{\text{somme télescopique}}{=} \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1).$$

On en déduit par encadrement $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$.

II.2 Propriétés fondamentales

Proposition 2.1 Si la série de terme général (u_n), $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge alors

$$u_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

preuve : Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, par hypothèse (S_n) admet une limite.

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=0}^{n+1} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = u_{n+1}$$

On a donc $\lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} \left(S_{n+1} - S_n\right) = S - S = 0$

De plus, $\lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} u_n$.

Remarque : • ⚠ En général $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \not\Rightarrow \sum_{n\geq 0} u_n$ convergente.

Par exemple, $u_n = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ mais $\sum_{n\geq 1} u_n = +\infty$.

• Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$ alors la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est divergente.

On dit que la série diverge grossièrement.

Proposition. Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ sont deux séries convergentes de somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ alors la série $\sum_{n\geq 0}(u_n + \lambda v_n)$ converge vers $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$

II 3 Séries à termes positifs

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série à terme général $u_n \in \mathbb{R}_+$.

La suite des sommes partielles $(S_n)_{n\geq 0}$ avec $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, est croissante.

si cette suite est majorée, c'est-à-dire s'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n \leq M$, alors la série converge. A l'inverse, si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée, alors la série diverge et sa somme est infinie : $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = +\infty$.

Théorème de comparaison : on considère deux séries à termes positifs $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$.

• s'il existe n_0 tel que : $\forall n \geq n_0 \quad 0 \leq u_n \leq v_n$ et si $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge et dans ce cas $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$

• Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, c'est-à-dire $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ alors les séries sont de même nature.

- Si $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge et $u_n = O(v_n)$ c'est-à-dire $u_n \leq C v_n$ pour tout n, pour un certain $C \in \mathbb{R}_+$ alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

Critères de convergence

- Critère de D'Alembert : soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série à termes strictement positifs à partir d'un certain rang :

On suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \in \mathbb{R}^+$, alors

- si $l < 1$, $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge
- si $l > 1$, $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge
- si $l = 1$, on ne sait pas a priori.

preuve : - Supposons $l < 1$, il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que $l + \varepsilon < 1$.

Par hypothèse $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$, donc il existe un rang n_0 tel que : $\forall n \geq n_0$ $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq l + \varepsilon$.

On en déduit que pour tout $n \geq n_0 + 1$

$$u_n = \prod_{k=n_0}^{n-1} \frac{u_{k+1}}{u_k} u_{n_0} \leq \prod_{k=n_0}^{n-1} (l+\varepsilon)\, u_{n_0} = u_{n_0} (l+\varepsilon)^{n-n_0}.$$

La série de terme général $v_n = (l+\varepsilon)^n$ est convergente car $l + \varepsilon < 1$.

par comparaison $\sum_{n\geq n_0} u_n \leq \sum_{n\geq n_0} v_n < \infty$, donc $\sum_{n\geq n_0} u_n$ est convergente

La convergence de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ ne dépend pas des premiers termes, donc

$$\sum_{n\geq 0} u_n = \sum_{n=0}^{n_0-1} u_n + \sum_{n=n_0}^{\infty} u_n < \infty.$$

- Supposons $\ell > 1$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\ell - \varepsilon > 1$ et n_0 tel que :

$\forall n \geq n_0 \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \ell - \varepsilon$. On en déduit que $u_n \geq (\ell-\varepsilon)^{n-n_0} u_{n_0}$ pour tout $n \geq n_0$. La série de terme général $v_n = (\ell-\varepsilon)^{n-n_0} u_{n_0}$ est divergente car $\ell - \varepsilon > 1$, par comparaison $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge.

<u>Remarque</u> : On aurait pu simplement remarquer que $v_n \underset{n \to +\infty}{\not\to} 0$ et donc $u_n \underset{n \to \infty}{\not\to} 0$.

<u>Exemples</u> : On applique le critère de D'Alembert aux séries de terme général :

- $u_n = \frac{n!}{n^n}$, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1)\, n^n}{(n+1)^{n+1}}$

et $\frac{n+1}{n} \leq \frac{(n+1)\, n^n}{(n+1)^{n+1}} \leq 1$

par encadrement $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$ et le critère de D'Alembert ne permet pas de conclure. Remarquer que l'on a $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$ donc $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ (la série ne diverge pas grossièrement).

- $u_n = \frac{1}{n!}$, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ donc la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!}$ converge. (On rappelle que sa somme est e).

- $u_n = \frac{1}{n}$, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$, donc le critère de D'Alembert ne permet pas de conclure. On a vu précédemment que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente.

- $u_n = \frac{1}{n^2}$, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$. On ne peut pas conclure. On verra que $\sum_{n \geq 1} u_n$ est convergente.

On admet les deux critères suivants. On verra la preuve du premier plus tard.

Critère de Riemann :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_*$, si $\alpha \in]1, +\infty[$ alors $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge

si $\alpha \in]-\infty, 1]$ alors $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge

En pratique, on pourra comparer le terme général u_n et $\frac{1}{n^\alpha}$.

. si $\alpha > 1$ et $u_n = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ c'est-à-dire qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout n suffisamment grand $u_n \leq C \frac{1}{n^\alpha}$, alors par le théorème de comparaison $\sum_{n \geq 1} u_n$ est convergente

. si $\alpha \leq 1$ et $\frac{1}{n^\alpha} = O(u_n)$, c'est-à-dire qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout n suffisamment grand, $\frac{1}{n^\alpha} \leq C\, u_n$, alors par le théorème de comparaison $\sum_{n \geq 1} u_n$ est divergente.

Critère de Cauchy : Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série à termes positifs

on suppose que $\left(u_n^{\frac{1}{n}}, n \geq 1\right)$ admet une limite finie $\ell \in \mathbb{R}_+$

. si $\ell < 1$ alors $\sum_{n \geq 1} u_n$ est convergente

. si $\ell > 1$ alors $\sum_{n \geq 1} u_n$ est divergente

⚠ si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure.

II. 4 Séries quelconques

Le théorème de comparaison et les critères précédents ne s'appliquent qu'aux séries de terme général de même signe.

Définition 2.3 Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série de terme général u_n à valeurs dans $\mathbb{R}$

On dit que $\sum_{n\geq 0} u_n$ est absolument convergente si $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ est convergente

Proposition 2.2 Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries absolument convergentes

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n\geq 0} (u_n + \lambda v_n)$ est absolument convergente

Preuve: On utilise l'inégalité triangulaire $|x+y| \leq |x| + |y|$, on a

$$|u_n + \lambda v_n| \leq |u_n| + |\lambda| |v_n|.$$

Par comparaison, si $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ et $\sum_{n\geq 0} |v_n|$ sont convergentes, alors il en est de même pour $\sum_{n\geq 0} (|u_n| + |\lambda| |v_n|)$ et donc pour $\sum_{n\geq 0} |u_n + \lambda v_n|$.

Théorème fondamental: une série absolument convergente est convergente.

On a de plus $\left|\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$.

Preuve: Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| < \infty$.

on note $u_n^+ = \max(0, u_n)$ la partie positive de u_n

et $u_n^- = \max(0, -u_n)$ la partie négative. On a donc

$u_n = u_n^+ - u_n^-$ et $u_n^+ \geq 0$, $u_n^- \geq 0$ pour tout n.

Clairement $u_n^+ \leq |u_n|$ et $u_n^- \leq |u_n|$ pour tout n.

Les séries à termes positifs $\sum_{n\geq 0} u_n^+$ et $\sum_{n\geq 0} u_n^-$ sont donc convergentes par le théorème de comparaison. On en déduit que $\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} (u_k^+ - u_k^-) = \sum_{k=0}^{n} u_k^+ - \sum_{k=0}^{n} u_k^-$ converge. □

Remarques : Si une série converge absolument alors elle converge. Mais la réciproque est fausse : Il existe des suites convergentes non-absolument convergentes. On dit alors qu'elles sont semi-convergentes.

Exemple : On va voir que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente

On a vu que la série $\sum_{n\geq 1} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente.

Définition 2.4 On dit qu'une série est alternée si et seulement si

$\forall n \in \mathbb{N}$ $(-1)^n u_n$ est de signe constant.

Autrement dit $(-1)^n u_n = (-1)^n |u_n|$ ou $(-1)^n u_n = -(-1)^n |u_n|$

pour tout $n \geq 0$.

Proposition 2.3 (Critère spécial) Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série alternée.

si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $(|u_n|, n\geq 0)$ est décroissante alors

la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

On a de plus : $\forall n \in \mathbb{N}$ $\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k\right| \leq |u_{n+1}|$

Exemple : La série de terme général $\frac{(-1)^n}{n}$ est

- alternée, en effet $(-1)^n u_n = (-1)^{2n} \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \geq 0$
- telle que $|u_n| = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $(|u_n|, n\geq 1)$ décroissante

Elle est donc convergente.

Preuve : On rappelle l'énoncé du théorème des suites adjacentes

Soient $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ deux suites. On dit qu'elles sont adjacentes si pour tout n $a_n \leq b_n$, et (a_n) est croissante, (b_n) est décroissante.

et $b_n - a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ "

On a alors $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ convergentes avec la même limite

On suppose que pour tout n, $u_n = (-1)^n |u_n|$ (l'autre cas se traite de façon symétrique)

Soit $a_n = S_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} u_k$ et $b_n = S_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} u_k$

On a $a_{n+1} - a_n = S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+2} + u_{2n+1} = |u_{2n+2}| - |u_{2n+1}| \leq 0$

car $(|u_n|)$ est décroissante

$b_{n+1} - b_n = S_{2n+3} - S_{2n+1} = u_{2n+3} + u_{2n+2} = -|u_{2n+3}| + |u_{2n+2}| \geq 0$

$b_n - a_n = S_{2n+1} - S_{2n} = u_{2n+1} = -|u_{2n+1}| \leq 0$ et $u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

On en déduit que $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ sont adjacentes : autrement dit les suites $(S_{2n})_{n\geq 0}$ et $(S_{2n+1})_{n\geq 0}$ sont convergentes et ont même limite, donc

$(S_n)_{n\geq 0}$ converge. □

Exemples Etudions la série $\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^k}{k^\alpha}$ en discutant selon les valeurs de α.

On pose $u_k = \frac{(-1)^k}{k^\alpha}$, clairement la série est alternée. On peut étudier la convergence absolue et la convergence :

. On a $|u_k| = \frac{1}{k^\alpha}$, d'après le critère de Riemann, si $\alpha > 1$ alors $\sum_{k\geq 1} |u_k| < \infty$
si $\alpha \leq 1$ alors $\sum_{k\geq 1} |u_k| = +\infty$

La série converge absolument (et donc converge) ssi $\alpha > 1$.

On a $|u_k| \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ si $\alpha > 0$ et $(u_k) \downarrow$ si $\alpha > 0$ On a donc par le critère spécial, $\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^k}{k^\alpha}$ convergente si $\alpha > 0$.

II.2 Séries entières

On appelle série entière, une série de la forme $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ avec (a_n) une suite et x un réel.
On s'intéresse au domaine de définition de la fonction $x \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ et à ses propriétés. La plupart des résultats de cette partie ne seront pas démontrés dans ce cours. On note $\Delta = \{ x \in \mathbb{R} \, ; \, \sum_{n\geq 0} a_n x^n \text{ converge} \}$

<u>Exemples</u>

1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, on cherche Δ.

On ~~utilise~~ le critère de D'Alembert, on a $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} = \frac{x}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

qui implique la convergence absolue pour tout $x \neq 0$

Au point $x=0$, la série est dégénérée en son premier terme 1

On en déduit $\mathbb{R} \subset \Delta$ et donc $\Delta = \mathbb{R}$.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$,

on a : $\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} \, \frac{n^2}{x^n} \right| = |x| \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} |x|$.

donc par le critère de D'Alembert, si $|x|<1$ alors la série converge absolument, si $|x|>1$ alors la série diverge.

Il reste à étudier le cas $|x| = 1$:

On a $\left|\frac{x^n}{n^2}\right| = \frac{|x|^n}{n^2} = \frac{1}{n^2}$ et par le critère de Riemann, puisque $2>1$

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} < \infty .$$

On a donc $\Delta = [-1, 1]$.

Exemples (suite)

3) $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$, $\left|\frac{(n+1)!\, x^{n+1}}{n!\, x^n}\right| = (n+1)|x| \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$

donc la série est divergente pour tout $x \neq 0$ pour $x=0$, on a clairement une série convergente

$\Delta = \{0\}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$; $\left|\frac{n\, x^{n+1}}{(n+1)\, x^n}\right| = \frac{n}{n+1}|x| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |x|$

Si $|x|<1$ alors la série converge absolument.

Si $x = 1$ alors on retrouve la série harmonique qui diverge

si $x=-1$, on retrouve la série alternée de terme général $\frac{(-1)^n}{n}$ qui converge.

$\Delta = [-1, 1[$.

Lemme d'Abel.
(facultatif)

Ce lemme est fondamental dans la théorie des séries entières.

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière. On suppose qu'il existe $x_0 \neq 0$ tel que $(a_n x_0^n)_{n\geq 1}$ soit bornée.

La série $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ est absolument convergente pour tout $|x| < |x_0|$. Autrement dit $]-x_0, x_0[\subset \Delta$.

Preuve : Par hypothèse, il existe M tel que : $\forall n \geq 0 \quad |a_n x_0^n| \leq M$.

On a $|a_n x^n| = \left|\frac{a_n x_0^n x^n}{x_0^n}\right| = |a_n x_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leq M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$. Si $|x|<|x_0|$ alors la série de terme général $\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ converge absolument. On conclut par encadrement. $\square$

Théorème (admis) Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière. Il existe un unique réel $R \geq 0$ (éventuellement infini) tel que

$\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ converge absolument si $x \in]-R, R[$

$\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ diverge si $|x| > R$.

Définition : Le nombre R est appelé rayon de convergence de la série entière

on a $R = \sup\{ r \in \mathbb{R}_+ \ ; \sum_{n\geq 0} |a_n| r^n \text{ converge} \} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$

Lemme d'Hadamard : Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière, son rayon de convergence est donné par

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to+\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$$

lorsque les limites existent et $R = \infty$ si les limites sont nulles.

Preuve : C'est une application directe du critère de D'Alembert et du critère de Cauchy :

- on pose $\ell = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$, on a $\frac{|a_{n+1} x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = |x| \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |x| \ell$

- d'après le critère de D'Alembert, la série converge absolument lorsque $|x| < \frac{1}{\ell}$ et diverge lorsque $|x| > \frac{1}{\ell}$.

  Par unicité de R, on a donc $R = \frac{1}{\ell}$.

- on pose $\ell = \lim_{n\to+\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$, $|a_n x^n|^{\frac{1}{n}} = |x| |a_n|^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} |x| \ell$.

  de la même façon, le critère de Cauchy indique que si $|x| \ell < 1$ la série converge absolument et si $|x| \ell > 1$ la série diverge $\square$.

Exemples

1) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ on a $\displaystyle\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{1^n} = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

donc $R = +\infty$,

2) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n^2}$ on a $\displaystyle\frac{1}{(n+1)^2}\cdot\frac{n^2}{1} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc $R=1$

3) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{2^n}$ on a $\displaystyle\frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$ donc $R = 2$.

4) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} 3^n x^{2n+5}$ on a $\displaystyle\frac{3^{n+1}x^{2n+7}}{3^n x^{2n+5}} = 3x^2 < 1$

ssi $x^2 < \frac{1}{3}$ donc $x \in \left]-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right[$

et $R = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Propriétés de la fonction $\displaystyle x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$: continuité, dérivabilité, intégrabilité.

$]-R,R[\longrightarrow \mathbb{R}$

Théorème (admis)

Soit $\displaystyle f : x\in]-R,R[\longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

La fonction f est continue, indéfiniment dérivable et on a : pour tout $k\geq 0$

la $k^{\text{ème}}$ dérivée de f est $\displaystyle f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}$.

Remarque :

- $\displaystyle f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$, on dérive sous le signe $\sum$.

$\displaystyle f^{(k)}(0) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n \underbrace{0^{n-k}}_{0 \text{ si } n\neq k,\ 1 \text{ si } n=k} = a_k$ donc $\boxed{\displaystyle f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f^{(n)}(0)\, x^n}$.

- On note parfois $\dfrac{n!}{(n-k)!} = (n)_k$

Primitive d'une série entière

Rappel : Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$. On dit que F est une primitive de f si F est dérivable sur $[a,b]$ et
$F'(x) = f(x)$.
Le théorème fondamental de l'analyse affirme que la fonction $F : x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est une primitive de f.

Proposition Soit $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon R.
La fonction $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ définie pour $x \in]-R, R[$ (est continue).
admet pour primitive $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$

Preuve : On remarque tout d'abord que la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n+1} x^n$ a même rayon de convergence que $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$.
La fonction $F : x \mapsto x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n+1}$ est donc dérivable et

$$F'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n+1} + x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n n x^{n-1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n \cancel{(n+1)}}{\cancel{n+1}} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Remarque : Si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ alors $\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \,dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^x t^n\,dt$

Opérations sur les séries entières

Proposition : Soit $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n x^n$ deux séries entières de rayon R et R'

Si $R \neq R'$: $\sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) x^n$ a pour rayon de convergence $R'' = \min(R, R')$

Si $R = R'$, le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) x^n$ est supérieur ou égal à R.

Exemple $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ a pour rayon de convergence $R = 1$

$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-2^n}{2^n} x^n$ a pour rayon de convergence $R' = 1$

$f(x) + g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^n$ a pour rayon de convergence $R'' = 2$.

Séries de Taylor

Problème. On se donne une fonction réelle à variable réelle x. Peut-on trouver une suite $(a_n)_{n \geq 0}$ et un réel $r > 0$ tels que :

$$\forall x \in]-r, r[\qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \; ?$$

→ Si la réponse est oui, on dit que f admet un développement en série entière au voisinage de 0.

Plus généralement une fonction f admet un développement en série entière au voisinage de x_0 s'il existe $r > 0$ tel que :

$$\forall x \in]x_0 - r, x_0 + r[\qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

Remarque : on a vu que l'on peut réécrire le coefficient a_n de la façon suivante $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$. S'il existe une suite réelle (a_n) telle que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ alors nécessairement $\begin{cases} \cdot\ f \text{ est } C^\infty \\ \cdot\ a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \end{cases}$

Théorème Soit f une fonction C^∞ au voisinage de 0. ~~On suppose qu'il~~ existe $M > 0$ tel que : $\forall x \in]-r, r[\quad |f^{(n)}(x)| \leq M$.

alors la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ converge pour $x \in]-r, r[$ et on a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Preuve : La preuve est basée sur la formule de Taylor-Mac Laurin

Le développement de Taylor de f au voisinage de 0 à l'ordre n donne :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} \quad \text{avec } \theta \in]0,1[.$$

Pour démontrer le théorème, il suffit de montrer que $\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Par hypothèse $|f^{(n+1)}(\theta x)| \leq M$ donc pour tout $x \in]-\pi, \pi[$:

$$\left| \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq \frac{\pi^{n+1}}{(n+1)!} M$$

La série de terme général $u_n = \frac{\pi^{n+1}}{(n+1)!}$ est convergente (c'est la série exponentielle, elle a un rayon de convergence infini). En particulier, on en déduit que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ et par encadrement $\frac{f^{(n+1)}(\theta x) x^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$

On a donc $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$

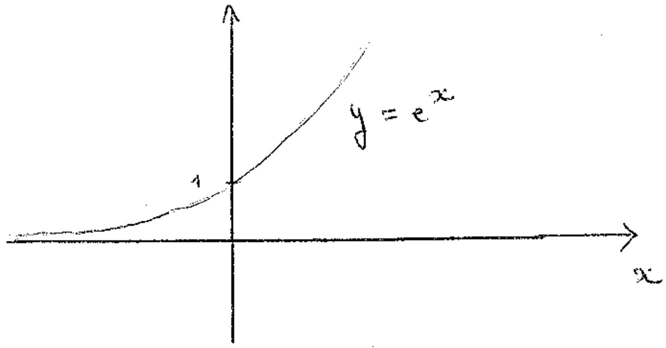
Remarques importantes : • Vous avez vu dans le cours d'harmonisation, la notion de développement limité, on reconnaît dans le développement de Taylor les mêmes termes " $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ ", mais ici le développement n'est pas limité : c'est une véritable égalité, sans correction de type $o(x^n)$.

• Dans la preuve, on utilise l'hypothèse que $f^{(n)}(x)$ est bornée pour montrer que le reste $\frac{f^{(n+1)}(\theta x) x^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$

On peut chercher à le démontrer directement. On verra un exemple où $f^{(n)}(x)$ n'est pas bornée.

Exemples classiques

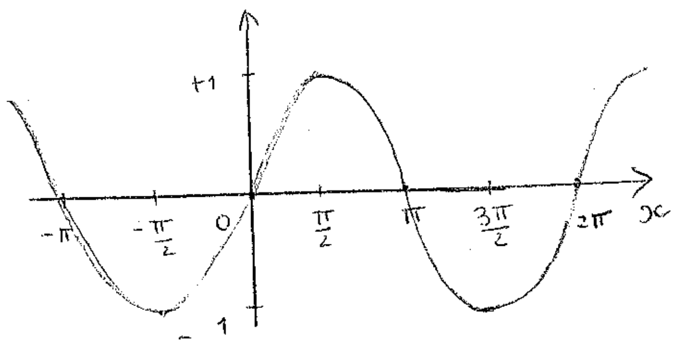
1) La fonction exponentielle $f(x) = e^x$ définie sur $\mathbb{R}$ a pour allure :



- c'est une fonction C^∞ et pour tout n, tout $x \in]-r, r[$ $f^{(n)}(x) = e^x \leq e^r$ donc par le théorème :

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

2) La fonction sin définie sur $\mathbb{R}$ a pour allure :



- c'est une fonction C^∞. Les dérivées d'ordre quelconque sont bornées par 1, on peut donc appliquer le théorème.

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin^{(n)}(0)}{n!} x^n \quad , \text{ le rayon de convergence de cette série entière est } R = +\infty.$$

On rappelle que $\sin'(x) = \cos x$ et $\cos'(x) = -\sin(x)$. On a $\sin(0) = 0$

on remarque que si l'on dérive sin un nombre de fois pair, on retombe sur sin à un signe près ; les termes $\sin^{(2n)}(0)$ sont nuls. Montrons par récurrence que $\sin^{(2p+1)}(x) = (-1)^p . \cos(x)$:

c'est vrai pour $p = 0$. Supposons que c'est vrai au rang p.

on a $\sin^{(2p+2)}(x) = \left(\sin^{(2p+1)}\right)'(x) = (-1)^p \times (-\sin x) = (-1)^{p+1} \sin x$

et $\sin^{(2p+3)}(x) = \left(\sin^{(2p+2)}\right)'(x) = (-1)^{p+1} \sin'(x) = (-1)^{p+1} \cos x$.

$\sin^{(2(p+1)+1)}(x) = (-1)^{p+1} \cos x$.

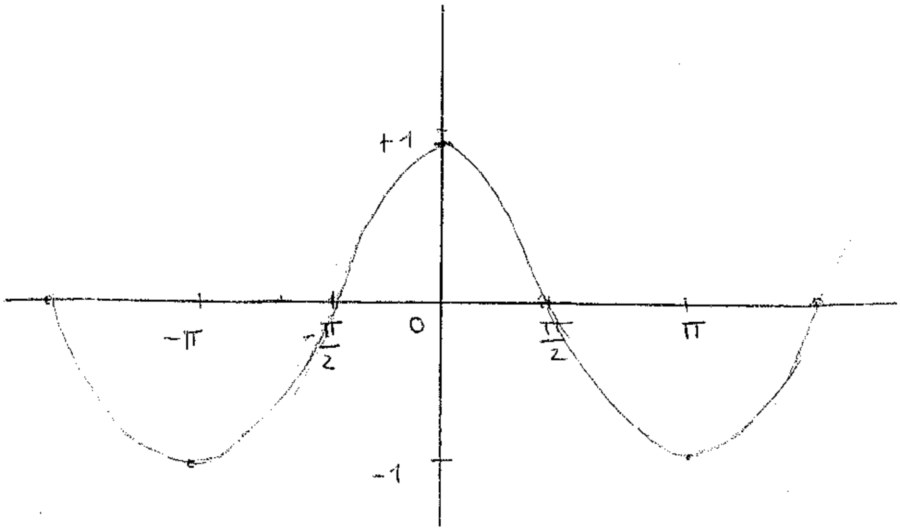
on en déduit que

Finalement $\sin^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2p \\ (-1)^p & \text{si } n = 2p+1 \end{cases}$ et $\boxed{\sin x = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} x^{2p+1}}$.

3) fonction cosinus : en utilisant les théorèmes du cours, on a directement

$$\boxed{\cos x = \sin'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{(2n+1)!} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n} x^{2n}.}$$

Allure de la fonction cosinus



4) La série du binôme

On rappelle la formule du binôme de Newton : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

avec $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\, k!}$

On étudie la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction est définie sur $]-1, +\infty[$ et est C^∞. Déterminons $f^{(n)}(x)$ pour tout x, tout n.

$f'(x) = \alpha (1+x)^{\alpha - 1}$ et $f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$. Montrons par récurrence que $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$ pour tout $x \in]-1, +\infty[$, tout $n \in \mathbb{N}$.

- La propriété est initialisée ($n=0$).
- On suppose que c'est vrai au rang n : $f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}\right)'(x)$

$$= \alpha(\alpha-1)(\ldots)(\alpha-n+1)(\alpha-n)(1+x)^{\alpha-n-1}$$

donc la propriété est héréditaire

Soit $r > 0$ et $x \in]-r, r[\cap]-1, +\infty[$

$|f^{(n)}(x)| \leq (1+r)^{\alpha-n} (\alpha)_n$.

Le membre de droite n'est pas borné, on ne peut pas appliquer directement le théorème

Par la formule de Taylor-Mac Laurin, pour $x \in]-r, r[$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}$$ pour un certain $\theta \in]-1,1[$.

$$\left| \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| = \frac{\alpha(\alpha-1)(\dots)(\alpha-n)}{(n+1)!} \Big| \underbrace{(1+\theta x)^{\alpha-n-1}}_{\leq (1+x)^{\alpha-1}} x^{n+1} \Big| \leq (1+r)^{\alpha-1} \frac{(\alpha)_{n+1}}{n!} \leq (1+r)^{\alpha-1} \frac{\alpha^{n+1}}{n!}$$

où l'on a noté $(\alpha)_{n+1} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n) \leq \alpha^{n+1}$. La suite $\left(\frac{\alpha^n}{n!}\right)$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ et on en déduit

$$\boxed{(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k x^k}{k!}}$$ avec $R = 1$.

(On verra plus tard qu'on peut démontrer cette égalité en identifiant la fonction $x \longmapsto (1+x)^\alpha$ comme unique solution d'une équation différentielle.) ← rem :

. On retrouve la formule du binôme de Newton, si $\alpha = n$ alors $(n)_k = 0$ pour $k \geq n+1$ et $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(n)_k}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$. $\binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!}$.

5) La fonction $x \longmapsto \frac{1}{1-x}$ somme géométrique : $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ $\left(= \text{premier terme } \frac{1-x^{\text{nombre de termes}}}{1-x} \right)$ $(x^0 = 1)$

si $|x| < 1$ alors $x^{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, et on a directement

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k}$$ avec $R = 1$.

$$\boxed{\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^k}$$ avec $R = 1$

6) La fonction $x \longmapsto \ln(1+x)$

On a $\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt$, on a vu $\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n$

donc $\ln(1+x) = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

car $(-1)^{n-1} = (-1)^{n+1}$

Finalement $\boxed{\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}}$

De même, on a $\ln(1-x) = -\int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt = -\int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} t^n\,dt = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$

on retrouve la formule

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\log(1-x).} \quad \text{et } R = 1.$$

Développement en série entière au voisinage d'un point x_0

Définition: On dit que f est développable en série entière au voisinage de x_0 si la fonction $y \longmapsto f(y+x_0)$ est développable en série entière au voisinage de 0.

On aura alors $f(y+x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (y+x_0)^n$ pour $y \in]-r, r[$, autrement dit

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \quad \text{pour } x \in]-r+x_0, r+x_0[.$$

Exemple: On cherche le développement en série entière de $\frac{1}{1+x}$ en $x_0 = 1$.

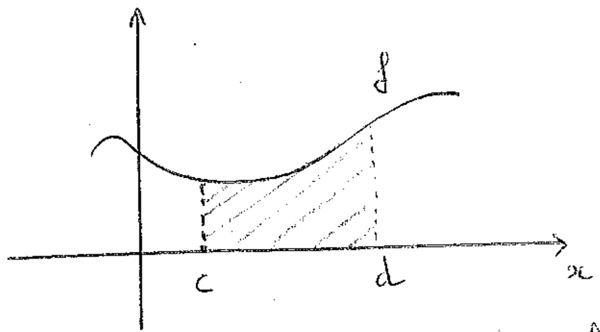
On pose $y = x-1$ $\quad \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2+y} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+\frac{y}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{y}{2}\right)^n$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^n}{2^{n+1}}.$$

Chapitre 2 : Intégration

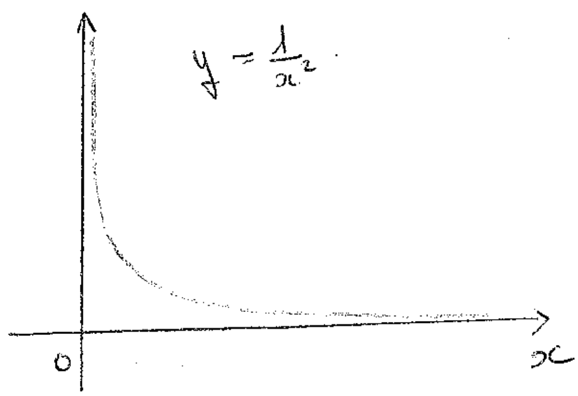
Les fonctions considérées dans ce chapitre sont continues par morceaux sur un intervalle ouvert. On rappelle qu'un intervalle ouvert est un ensemble I de la forme $]a, b[$, $]-\infty, b[$, $]a, +\infty[$. On notera dans tous les cas $a = \inf I$, $b = \sup I$ à valeurs respectivement dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

Dans le cours d'harmonisation, vous avez défini la notion d'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment, c'est-à-dire un intervalle de la forme $J = [c, d]$.
Intuitivement, l'intégrale d'une fonction f sur l'intervalle J est l'aire sous la courbe de f restreinte à J :



$$\int_{[c,d]} f(x)\,dx = \text{▨}$$

L'objectif du chapitre est d'étudier la notion d'intégrale sur un intervalle quelconque. On peut par exemple imaginer que la fonction ne soit pas définie en $a = 0$ et qu'elle ait une asymptote verticale :
Par exemple, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ a l'allure suivante



Une question naturelle est de savoir si "l'aire entre la courbe et l'axe Ox" est finie.

2.1 fonctions intégrables

Définition Une fonction positive f est intégrable s'il existe M tel que pour tout segment $J \subset I$ alors $\int_J f(x)\,dx \leq M$.

On appelle intégrale de f sur I le réel défini par

$$\int_I f(x)\,dx = \sup \left\{ \int_J f(x)\,dx \mid J \text{ segment inclus dans } I \right\}$$

Proposition : On rappelle que $I =]a, b[$. Si $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ sont des suites d'éléments de I convergeant respectivement vers a et b et si

- Si f est intégrable sur I alors $\int_{[a_n, b_n]} f(x)\,dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{]a,b[} f(x)\,dx$.

- Si (a_n) est décroissante et (b_n) est croissante alors la suite définie par

$$I_n = \int_{[a_n, b_n]} f(x)\,dx$$

est croissante et

- si elle est majorée alors elle converge vers I et f est intégrable
- si elle n'est pas majorée alors elle diverge vers $+\infty$ et f n'est pas intégrable.

Preuve : . le premier point découle de la continuité de l'application $x \mapsto \int_c^x f(t)\,dt$
. le deuxième point découle du théorème de la limite monotone

Dans la pratique, on utilisera le deuxième point de la proposition pour établir l'intégrabilité et calculer l'intégrale. Revenons à l'exemple $x \mapsto \frac{1}{x^2}$. Cette fonction est-elle intégrable sur $]0,1[$? sur $]1,+\infty[$?

sur]

On commence par $]0,1[$. Soit $a_n = \frac{1}{n}$, on a bien (a_n) décroissante et $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = \left[\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\right]_{\frac{1}{n}}^{1} = -1 + \left(\frac{1}{n}\right)^{-1} = n-1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

on en déduit que $f : x \mapsto \frac{1}{x^2}$ n'est pas intégrable sur $]0,1[$.

On traite maintenant le cas $]1,+\infty[$. Soit $b_n = n$, on a bien (b_n) croissante et $b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

$$\int_{1}^{b_n} \frac{1}{x^2}\,dx = \left[\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\right]_{1}^{b_n} = -\frac{1}{b_n} + 1 = 1 - \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

on en déduit que $f : x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable sur $]1,+\infty[$.

- Intégrabilité de fonctions usuelles

1) La fonction $x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto e^{-ax}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ ssi $a>0$:

En effet
$$\int_0^n e^{-ax}\,dx = \left[\frac{-e^{-ax}}{a}\right]_0^n = \frac{1-e^{-an}}{a} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{a}$$

si $a \leqslant 0$ alors $e^{-ax} \geqslant 1$ et $\int_0^n e^{-ax}\,dx \geqslant n$.

2) la fonction $x \in]0,+\infty[\longmapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est intégrable sur $]1;+\infty[$, ssi $\alpha > 1$.

si $\alpha \neq 1$ - $\int_1^n \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^n = \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}$ admet une limite si et seulement si $\alpha > 1$ et alors $\int_1^n \frac{1}{x^\alpha}\,dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{\alpha-1}$.

si $\alpha = 1$ $\int_1^n \frac{1}{x}\,dx = \ln n$ et $\int_1^n \frac{1}{x}\,dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

3) La fonction $x \in]0,1[\longmapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est intégrable sur $]0,1[$ ssi $\alpha < 1$.

$$\text{si } \alpha \neq 1 : \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_{\frac{1}{n}}^{1} = \frac{1}{1-\alpha} - \frac{n^{\alpha-1}}{1-\alpha} \to \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{si } \alpha<1 \\ +\infty & \text{si } \alpha>1 \end{cases}$$

si $\alpha = 1$ $\int_{1/n}^{1} \frac{1}{x}\,dx = \ln n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Relation de Chasles : $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ pour tout $c \in]a,b[$

Linéarité : Si f et g sont intégrables positives sur I alors $f+g$ aussi et $\int_I (f(x)+g(x))\,dx = \int_I f(x)\,dx + \int_I g(x)\,dx$

Théorème de comparaison et conditions d'intégrabilité

1) Soient f et g deux fonctions positives telles que $0 \leq f \leq g$

Si g est intégrable alors f est intégrable

Si f n'est pas intégrable alors g n'est pas intégrable.

2) Applications : . Si $\lim_{x \to +\infty} x^\alpha f(x) = 0$ pour un certain $\alpha > 1$

alors f est intégrable sur $]c; +\infty[$.

. Si $\lim_{x \to 0} x^\alpha f(x) = 0$ pour un certain $\alpha < 1$

alors f est intégrable sur $]0, c[$.

. S'il existe $c' > 0$ tel que $f(x) \geq c' \frac{1}{x^\alpha}$ pour un certain $\alpha < 1$

alors f n'est pas intégrable. sur $]c, +\infty[$

. s'il existe $c' > 0$ tel que $f(x) \geq \frac{c'}{(b-x)^\alpha}$ pour un certain $\alpha > 1$

alors f n'est pas intégrable sur $]c, b[$.

Corollaire : Si $f \underset{b}{\sim} g$, c'est-à-dire $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to b]{} 1$ alors f et g sont simultanément intégrables ou non au voisinage de b

Exemples

1) $f : x \mapsto (1+x^3)^\alpha$ est continue sur $]-1, +\infty[$ quelque soit α.

$f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} x^{3\alpha}$ donc f est intégrable sur $]1, +\infty[$ ssi $-3\alpha > 1$

c'est-à-dire $\alpha < -\frac{1}{3}$.

$f(x) \underset{x \to -1}{\sim} 3^\alpha (1+x)^\alpha$ donc f est intégrable sur $]-1, 1[$ ssi $\alpha > -1$

En définitive f est intégrable sur $]-1, +\infty[$ ssi $\alpha \in]-1, -\frac{1}{3}[$.

2) La fonction $f(x) = -\ln x$ est positive sur $]0,1[$, est-elle intégrable sur $]0,1[$?

- première méthode : on sait que $\sqrt{x} \ln x \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ donc d'après le théorème (avec $b = 0$) et $\alpha = \frac{1}{2}$, la fonction $-\ln$ est intégrable sur $]0,1[$.

- La première méthode ne donne pas la valeur de l'intégrale. La deuxième méthode consiste à déterminer une primitive de $\ln$. On a donc, Une primitive de $\ln x$ est $x - x\ln x$.

Soit $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$: $\int_{a_n}^{1} -\ln x \, dx = \left[x - x\ln x \right]_{a_n}^{1} = 1 - a_n + a_n \ln a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

La fonction est intégrable et son intégrale $\int_0^1 -\ln x \, dx$ est 1.

2.2 Comparaison série - intégrale

Il est souvent plus facile de montrer l'intégrabilité d'une fonction que la convergence d'une série. Les deux théories sont en réalité très proches :

Proposition : Soit f une fonction positive sur $]a, b[$ et (b_n) une suite croissante qui converge vers b.

La fonction est intégrable au voisinage de b si et seulement si la série de terme général $\int_{b_{n-1}}^{b_n} f(x)\,dx$ est convergente

On a alors $\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{b_{n-1}}^{b_n} f(x)\,dx$.

Exemple (*) : ← bizarre de commencer par une fonction non intégrable !

Montrons que la fonction $f : x \mapsto \frac{|\sin x|}{x}$ pour $x > 0$ prolongée par continuité en 0 par $f(0) = 1$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Soit $b_n = (n+1)\pi$

$$\int_{b_{n-1}}^{b_n} f(x)\,dx = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(x)\,dx = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \geq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{(n+1)\pi}\,dx$$

$$\geq \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin x|\,dx$$

et $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin x|\,dx = \int_0^{\pi} \sin x\,dx = -\cos\pi + \cos 0 = 2$.

d'où $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \geq \frac{2}{\pi}\frac{1}{n+1}$.

Finalement $\sum_{n\geq 0} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx$ est divergente par comparaison avec la série harmonique et donc $x \mapsto \frac{|\sin x|}{x}$ n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$.

Théorème (Comparaison série - intégrale)

Soit f une fonction continue décroissante positive sur $[1, +\infty[$

La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(f(n) - \int_n^{n+1} f(t)\,dt\right)$ converge

En particulier la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\int_n^{n+1} f(t)\,dt$ et la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f(n)$ ont la même nature.

Preuve : on a $\displaystyle f(n) - \int_n^{n+1} f(t)\,dt \leq f(n) - f(n+1)$. car $f(t) \geq f(n+1)$ pour tout $t \in [n, n+1]$

On reconnait à droite le terme général d'une série télescopique :

$$\sum_{k=1}^{n}\left(f(k) - f(k+1)\right) = f(1) - \cancel{f(2)} + \cancel{f(2)} - f(3) + \cdots + \cancel{f(n)} - f(n+1)$$
$$= f(1) - f(n+1).$$

La fonction f étant positive, décroissante la suite $(f(n+1))_{n\geq 1}$ est positive décroissante et donc converge.

On en déduit par comparaison que la série de terme général $\displaystyle f(n) - \int_n^{n+1} f(t)\,dt$ est convergente.

Pour conclure, • supposons que f soit intégrable, on a alors $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\int_n^{n+1} f(t)\,dt$ convergente, de somme $\displaystyle\int_1^{\infty} f(t)\,dt$; et donc

$$\sum_{n\geq 1}\left(f(n) - \int_n^{n+1} f(t)\,dt\right) + \sum_{n\geq 1}\int_n^{n+1} f(t)\,dt = \sum_{n\geq 1} f(n) \quad \text{convergente.}$$

• Supposons que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f(n)$ soit convergente, alors de la même façon : $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(\int_n^{n+1} f(t)\,dt - f(n)\right) + \sum_{n\geq 1} f(n)$ convergente et f intégrable.

Applications :

1) On va utiliser ce théorème pour démontrer le critère de Riemann :

On a dit dans le chapitre sur les séries que $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$.

Soit $f(t) = \frac{1}{t^\alpha}$ f est positive décroissante.

$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente ssi f est intégrable au voisinage de $+\infty$.

On a vu précédemment que f est intégrable ssi $\alpha > 1$, le critère de Riemann est ainsi démontré.

2) Constante d'Euler (*) On a vu que la série harmonique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente.

En appliquant directement le théorème, on voit que $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$ est convergente

On a $\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,dt \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\,dt$ pour tout $k \geq 2$.

D'autre part $\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,dt = \ln(k+1) - \ln(k)$ et $\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\,dt = \ln k - \ln(k-1)$

On a donc $\underbrace{\sum_{k=2}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,dt}_{\ln(n+1) - \ln 2} \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\,dt$

$$\ln(n+1) - \ln 2 \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln(n).$$

On en déduit $1 + \ln(1+\frac{1}{n}) - \ln 2 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \leq 1$, et la limite de (u_n) est comprise entre $1 - \ln 2$ et 1.

2.3 Intégrale d'une fonction non nécessairement de signe constant :

On a vu dans le chapitre sur les séries deux notions de convergence. Il y a le même type de difficulté lorsque l'on veut étudier l'intégrale d'une fonction qui change de signe.

Définition : Une fonction f définie sur un intervalle I est intégrable si la fonction positive $|f|$ est intégrable.

Dans ce cas, les fonctions $f^+(x) = \max(f(x), 0)$ et $f^-(x) = \max(-f(x), 0)$ sont intégrables par comparaison et $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$, on pose alors et par définition

$$\int_I f(x)\,dx = \int_I f^+(x)\,dx - \int_I f^-(x)\,dx.$$

Proposition Soit f une fonction intégrable sur I : $\left|\int_I f(x)\,dx\right| \leq \int_I |f(x)|\,dx$. (Inégalité triangulaire)

Dans ce cours, on se bornera à l'étude et aux calculs des intégrales de fonctions intégrables.

On mentionne néanmoins qu'il est possible d'avoir $\left(\int_a^{b_n} f(t)\,dt\right)_{n\geq 1}$ convergente et f non-intégrable lorsque f change de signe !

Proposition : Si f est intégrable alors : si (a_n) est décroissante et converge vers a et (b_n) est croissante et converge vers b

On a
$$\lim_{n\to+\infty} \int_{a_n}^{b_n} f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt.$$

Définition : Si $b \geq a$ on pose $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$.

On a ainsi par Chasles $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx = 0$.

Exemples

1) $f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$ pour $x \in]0, \infty[$. On a $|f(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$

et $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ intégrable au voisinage de 0

non-intégrable au voisinage de $+\infty$

La fonction f est donc intégrable sur $]0,1[$.

Etudions $\int^{+\infty} \left|\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\right| dx$ à l'aide d'une comparaison avec une série

On sait que $\int^{+\infty} \left|\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\right| dx$ a la même nature que $\sum_{n\geq 1} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\cos x|}{\sqrt{x}} dx$

Pour tout $x \in]n\pi, (n+1)\pi[$, on a $\frac{|\cos x|}{\sqrt{x}} \geq \frac{|\cos x|}{\sqrt{(n+1)}\sqrt{\pi}}$.

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\cos x|\, dx = \int_{n\pi}^{n\pi+\frac{\pi}{2}} |\cos x|\, dx + \int_{n\pi+\frac{\pi}{2}}^{(n+1)\pi} |\cos x|\, dx = 2\int_0^{\pi/2} \cos x\, dx = +2\sin\frac{\pi}{2} - 2\sin 0 = 2.$$

d'où $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\cos x|}{\sqrt{x}} dx \geq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

et $\sum_{n\geq 1} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\cos x|}{\sqrt{x}} dx$ est divergente car $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge

2) $f(x) = x\, e^{-x^2/2}$ pour $x \in]-\infty, +\infty[$ f est-elle intégrable sur $]-\infty, +\infty[$?

Par croissance comparée $\frac{|x| e^{-x^2/2}}{\frac{1}{x^2}} = |x|^3 e^{-x^2/2} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

autrement dit $|x| e^{-x^2/2} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$, par le critère de Riemann

$x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$, on a donc

$x \mapsto |x| e^{-x^2/2}$ intégrable au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$

$$\int_0^{+\infty} x e^{-x^2/2} dx + \int_{-\infty}^0 x e^{-x^2/2} = \int_0^{+\infty} x e^{-x^2/2} dx - \int_0^{+\infty} x e^{-x^2/2} = 0$$

L'intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle symétrique est nulle.

2.4 Calcul d'une intégrale

On rappelle le théorème du changement de variable et l'intégration par parties.
Ces deux méthodes permettent de modifier une intégrale a priori difficile
à étudier directement (pas de primitive claire par exemple).

Proposition : Intégration par parties :

On cherche à calculer une intégrale de la forme :

$$\int_I u'(t)\, v(t)\, dt \quad \text{avec} \quad \begin{matrix} u \in \mathcal{C}^1 \\ v \in \mathcal{C}^1. \end{matrix}$$

① on vérifie l'intégrabilité si la fonction $t \mapsto u'(t)v(t)$ change de signe.
② on applique l'intégration par parties sur le segment $]a_n, b_n[$ où
$a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\downarrow} a$ et $b_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\uparrow} b$.

$$\int_{a_n}^{b_n} u'(t)v(t)\, dt = \Big[u(t)v(t)\Big]_{t=a_n}^{t=b_n} - \int^{b_n} u(t)\, v'(t)\, dt.$$

$$= u(b_n)v(b_n) - u(a_n)v(a_n) - \int_{a_n}^{b_n} u(t)v'(t)\, dt.$$

Si les limites lorsque $n \to +\infty$ existent :

On a donc $$\boxed{\int_a^b u(t)v(t)\, dt = \lim_{n \to +\infty} \left(u(b_n)v(b_n) - u(a_n)v(a_n)\right) - \int_a^b u(t)v'(t)\, dt}$$

Exemple : 1) $$\int_a^b \frac{\ln x}{x}\, dx = \int_a^b u'(x)\, v(x)\, dx \qquad \begin{matrix} v(x) = \ln(x) \\ u'(x) = \dfrac{1}{x} \end{matrix}$$

$$= \Big[\ln^2[x]\Big]_a^b - \int_a^b \frac{\ln(t)}{t}\, dt.$$

d'où $$\int_a^b \frac{\ln x}{x}\, dx = \frac{\ln^2 b - \ln^2 a}{2}.$$

2) On pose $g(x) = xe^{-\lambda x}$. On s'intéresse à l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} g(x)\,dx = \int_0^{+\infty} x\,e^{-\lambda x}\,dx.$$

. <u>Intégrabilité de g</u> : . Il n'y a pas de problème en 0 car g est définie en 0, on a $g(0) = 0$.

Pour tout $\alpha > 0$, on a par croissance comparée $x^\alpha g(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ et donc $g(x) = o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$

En particulier, c'est vrai pour $\alpha > 1$ et $\int^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx < \infty$, par le théorème

Par le critère de Riemann g est bien intégrable au voisinage de $+\infty$.

de comparaison

. <u>Calcul de l'intégrale</u>

On calcule $\int_0^a g(x)\,dx = \int_0^a x\,e^{-\lambda x}\,dx$ par intégration par parties

On pose $\begin{cases} u'(x) = e^{-\lambda x} \\ v(x) = x \end{cases}$, on a

$$\int_0^a u'(x)\,v(x)\,dx = \left[\frac{-e^{-\lambda x}}{\lambda}x\right]_0^a - \int_0^a \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\,dx$$

$$= -\frac{a e^{-\lambda a}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\int_0^a e^{-\lambda x}\,dx$$

$$= -\frac{a e^{-\lambda a}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\left[-\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\right]_0^a$$

$$= -\frac{a e^{-\lambda a}}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda a}}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2}$$

$$= -e^{-\lambda a}\left[\frac{a}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2}\right] + \frac{1}{\lambda^2}$$

On fait tendre a vers $+\infty$; et on obtient

$$\int_0^{+\infty} x\,e^{-\lambda x}\,dx = \underbrace{\lim_{a\to\infty}\left(-e^{-\lambda a}\left(\frac{a}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2}\right)\right)}_{=0} + \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

Théorème du changement de variable

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$. Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. C'est-à-dire dérivable et de fonction dérivée continue.
On suppose $\varphi([a,b]) \subset [a,b]$. On a la formule :

$$\boxed{\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f\circ\varphi(t)\ \varphi'(t)\,dt}$$

Si φ est bijective, on a : $\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f\circ\varphi(t)\,\varphi'(t)\,dt.}$

Preuve : La deuxième formule se déduit directement de la première, en remplaçant a par $\varphi^{-1}(a)$ et b par $\varphi^{-1}(b)$. On démontre donc la première.
On reconnait dans la fonction $t\mapsto f\circ\varphi(t)\ \varphi'(t)$ la dérivée d'une fonction composée. Soit $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, la dérivée de $t\mapsto F\circ\varphi(t)$ est $t\mapsto (F'\circ\varphi(t))\ \varphi'(t)$ et $F'(x) = f(x)$ donc

$$\int_a^b f\circ\varphi(t)\ \varphi'(t)\,dt = \Big[F\circ\varphi(t)\Big]_{t=a}^{t=b} = \int_a^{\varphi(b)} f(x)\,dx - \int_a^{\varphi(a)} f(x)\,dx$$

$$= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx.$$

Exemples d'application :

1) $\int_a^b \frac{\ln x}{x}\,dx$. On pose $t = \ln x$, $x = e^t$ $dx = e^t\,dt$

$$\int_a^b \frac{\ln x}{x}\,dx = \int_{\ln a}^{\ln b} \frac{t}{\cancel{e^t}}\,\cancel{e^t}\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_{\ln a}^{\ln b} = \frac{\ln^2 b - \ln^2 a}{2}$$

Plus rapidement : Une fois le changement de variable choisi $t = \ln x$, on écrit $dt = \frac{1}{x}\,dx$ et on remplace dans l'intégrale : $\int_a^b \frac{\ln x}{x}\,dx = \int_{\ln(a)}^{\ln(b)} t\,dt$. En faisant attention aux bornes.

2) $\displaystyle\int_{\sqrt{2\pi}}^{2\sqrt{\pi}} 2x\cos(x^2)\,dx$. La fonction étant définie et continue sur tout point de $[\sqrt{\pi}, \sqrt{2\pi}]$, cette intégrale est bien définie :

On pose $t = x^2$: $dt = 2x\,dx$ et $\displaystyle\int_{\sqrt{2\pi}}^{2\sqrt{\pi}} 2x\cos(x^2)\,dx = \int_{2\pi}^{4\pi} \cos(t)\,dt$

$$= \Big[\sin(t)\Big]_{2\pi}^{4\pi}$$

$$= 0.$$

3) On cherche à calculer $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$

① On vérifie l'intégrabilité de $x \longmapsto \dfrac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$ sur $[1, +\infty[$.

Il n'y a pas de problème en 1, la fonction y est définie et continue.

Il faut étudier l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$:

on a $\dfrac{1}{x\sqrt{1+x^2}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$ et $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2}$ est intégrable par le critère de Riemann. Par le théorème de comparaison,

I est bien définie.

② on étudie $\displaystyle\int_1^n \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$, on fera tendre n vers l'infini après.

On pose $t = \sqrt{1+x^2}$, $x = \sqrt{t^2-1} = \varphi(t)$

$$\varphi'(t) = \frac{\cancel{2}t}{\cancel{2}\sqrt{t^2-1}} = \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{1}{\sqrt{t^2-1}\,\cancel{t}}\,\frac{\cancel{t}}{\sqrt{t^2-1}}\,dt = \int \frac{1}{t^2-1}\,dt$$

On place maintenant les bornes : lorsque $x = 1$, $t = \sqrt{2}$
$x = n$, $t = \sqrt{1+n^2}$

donc $\displaystyle\int_1^n \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{n^2+1}} \frac{1}{t^2-1}\,dt$, $\dfrac{1}{t^2-1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{t-1} - \dfrac{1}{t+1}\right)$

$$= \frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{n^2+1}} \frac{1}{t-1}\,dt - \frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{n^2+1}} \frac{1}{t+1}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{\sqrt{n^2+1}-1}{\sqrt{2}-1}\right) - \ln\left(\frac{\sqrt{n^2+1}+1}{\sqrt{2}+1}\right)\right).$$

donc $\displaystyle\int_1^n \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{n^2+1}-1}{\sqrt{n^2+1}+1}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)$

et $\displaystyle I = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right) = \ln(\sqrt{2}+1).$

<u>note</u> : on aurait pu chercher à calculer cette intégrale par intégration par parties. Cela aurait été sans succès.

Certaines fonctions n'ont pas de primitive s'exprimant en termes de fonctions usuelles. C'est le cas par exemple de $x \mapsto e^{-x^2}$. Il est néanmoins très important de pouvoir connaître des valeurs approchées. On utilise donc des méthodes de calcul approché.

2.5 Calcul approché d'une intégrale

<u>Remarque</u> : Ce chapitre sera vu plus en détails dans le cours méthodes numériques.

<u>Sommes de Riemann</u> :

<u>Définition</u> : On appelle subdivision de $[a,b]$ une suite finie $(x_i)_{i\in[[0,n]]}$ telle que $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. On appelle <u>pas</u> de la subdivision le réel

$$\delta = \max_{i\in[[1,n]]}(x_i - x_{i-1})$$

<u>Exemple</u> : La subdivision à pas constant est $x_i = a + \frac{(b-a)i}{n}$, son module est $\frac{b-a}{n}$, il est d'autant plus petit que n est grand.

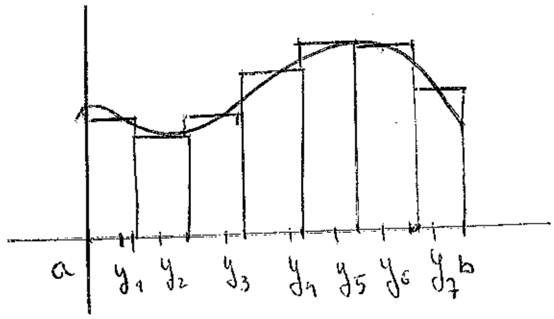
<u>Définition</u> : . Soit $(x_i)_{i\in[[0,n]]}$ une subdivision de $[a,b]$ et $(y_i)_{i\in[[1,n]]}$ des points tels que : $\forall i \in [[1,n]]$ $y_i \in [x_{i-1}, x_i]$

. Soit f une fonction continue sur $[a,b]$.

On appelle <u>Somme de Riemann</u>, la quantité :

$$\boxed{\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(y_i)}$$

σ_n est la somme des aires des rectangles de base $x_i - x_{i-1}$ et de hauteurs $f(y_i)$:



<u>Théorème</u> (admis) Soit f une application continue sur $[a,b]$, σ_n une somme de Riemann de pas $\delta_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

On a $\sigma_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_a^b f(x)dx$

<u>Méthode des rectangles</u>

On prend la subdivision à pas constant $x_i = a + \frac{b-a}{n} i$

① Si $y_i = x_i$, on obtient $\boxed{\sigma_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + \frac{b-a}{n} i\right)}$

On notera cette somme $R_n(f)$.

② Si $y_i = x_{i-1}$, on obtient $\boxed{\sigma_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + \frac{b-a}{n} i\right)}$

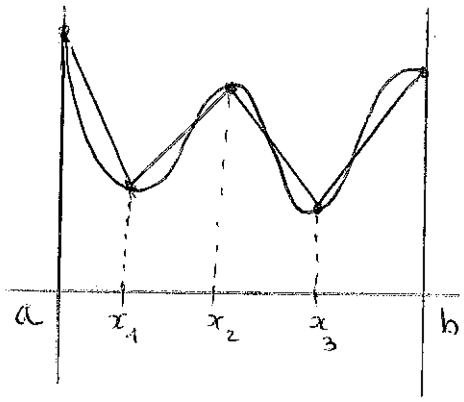
on notera cette somme $S_n(f)$

③ si $y_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$ et on obtient $\boxed{\sigma_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + \frac{b-a}{2n}(2i-1)\right)}$.

alors $y_i = \frac{a + \frac{b-a}{n}(i-1) + a + \frac{b-a}{n} i}{2}$ on notera cette somme $M_n(f)$

$= a + \frac{b-a}{2n}(2i-1)$

<u>Méthode des trapèzes</u> : on considère sur chaque intervalle de la subdivision, non plus des rectangles mais <u>des trapèzes</u> : on approche la courbe dans chaque intervalle par la fonction affine prenant les mêmes valeurs que f aux points de la subdivision.



On a ainsi
$$T_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2} = \frac{R_n(f)+S_n(f)}{2}$$
$$= \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{f\left(a+\frac{b-a}{n}(i-1)\right)+f\left(a+\left(\frac{b-a}{n}\right)i\right)}{2}$$
$$= \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}+\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n}f\left(a+\frac{b-a}{n}(i-1)\right)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}f\left(a+\left(\frac{b-a}{n}\right)i\right)\right]$$
$$= \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{i=1}^{n-1}f\left(a+\frac{b-a}{n}i\right)\right]$$

<u>Corollaire</u> : $\left(R_n(f)\right)_{n\geq 0}$, $\left(S_n(f)\right)_{n\geq 0}$, $\left(M_n(f)\right)_{n\geq 0}$ et $\left(T_n(f)\right)_{n\geq 0}$ convergent vers $\int_a^b f(x)\,dx$.

On s'intéresse à l'incertitude de ces méthodes : quelle est l'erreur commise lorsque l'on évalue $\int_I f(x)\,dx$ par $R_n(f)$, $S_n(f)$, $M_n(f)$, $T_n(f)$?

Pour pouvoir déterminer une borne de l'erreur $\left|\int_I f(x)\,dx - \sigma_n\right|$, on va devoir faire des hypothèses de régularité sur f

<u>Rappels importants</u>

1) Une fonction f est k-Lipschitzienne sur $[a,b]$ si

$$\forall\, x, y \in [a,b] \qquad |f(x)-f(y)| \leq k\,|x-y|.$$

2) Inégalité des accroissements finis :

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$

telle que $f'(x)$ soit bornée : i.e $\exists\, k$ tq $\forall x \in]a,b[$ $|f'(x)| \leq k$

alors $|f(x)-f(y)| \leq k\,|x-y|$ pour tous $x, y \in]a,b[$.

3) <u>Inégalité de Taylor-Lagrange</u>

Soit f une fonction $n+1$ dérivable sur $]a,b[$

On suppose qu'il existe M tel que $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ pour tout $x \in]a,b[$

alors $\forall x_1 \in]a,b[$, $\forall x_2 \in]a,b[$

$$\left| f(x_2) - f(x_1) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(x_2-x_1)^k}{k!} f^{(k)}(x_1) \right| \leq M \, \frac{|x_2-x_1|^{n+1}}{(n+1)!}$$

<u>Proposition</u> : Soit f une application k-lipschitzienne sur $[a,b]$

et soit σ_n une somme de Riemann associée à f

de pas $\frac{b-a}{n}$.

$$\left| \int_{[a,b]} f(u)\,du - \sigma_n \right| \leq k\,\frac{(b-a)^2}{n}$$

<u>Preuve</u> : $\displaystyle\int_{[a,b]} f(u)\,du - \sigma_n = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(u) - f(y_i))\,du$ et $\forall u \in]x_{i-1}, x_i[$ $|f(u)-f(y_i)| \leq k\,|u-y_i| \leq k\,\frac{b-a}{n}$.

d'où $\displaystyle\left|\int_{[a,b]} f(u)\,du - \sigma_n\right| \leq \sum_{i=1}^{n} k \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 = k\,\frac{(b-a)^2}{n}$.

Méthode des rectangles

$$R_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$

<u>Lemme</u>: Soit $f \in \mathcal{C}^1(]a,b[)$, on suppose $|f'(x)| \leq M_1$ pour tout $x \in]a,b[$.

si $\alpha \leq \beta$ alors $\left| \int_\alpha^\beta f(t)\,dt - (\beta-\alpha) f(\alpha) \right| \leq \frac{M_1}{2}(\beta-\alpha)^2$.

<u>Démonstration</u>: On pose $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange :

$$|F(\beta) - F(\alpha) - (\beta-\alpha)F'(\alpha)| \leq \underbrace{\sup_{]a,b[}|F''(x)|}_{\leq M_1} \frac{(\beta-\alpha)^2}{2}$$

on a donc $\left| \int_\alpha^\beta f(t)\,dt - (\beta-\alpha) f(\alpha) \right| \leq M_1 \frac{(\beta-\alpha)^2}{2}$.

Calcul de l'erreur

$$E_n = \left| \int_I f(x)\,dx - R_n(f) \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,dt - \frac{b-a}{n} f(x_{i-1}) \right) \right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,dt - \underbrace{\frac{b-a}{n}}_{x_i - x_{i-1}} f(x_{i-1}) \right|$$

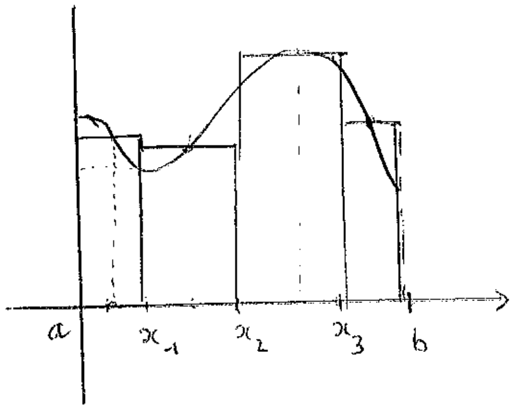
$$\boxed{E_n \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{M_1}{2}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2 = \frac{(b-a)^2 M_1}{2n}}$$

<u>Remarques</u>:
1) on dit que la méthode est d'ordre 1 car on a une erreur de l'ordre de $1/n$.
2) Si on avait pris $S_n(f)$ au lieu de $R_n(f)$, on aurait également une erreur d'ordre 1.

Méthode des rectangles médians

on prend $y_i = \dfrac{x_{i-1}+x_i}{2}$

on note $\sigma_n = \dfrac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(\dfrac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) = M_n(f)$



on sait que les sommes de Riemann sont d'ordre au moins 1.
on va montrer que la méthode des rectangles médians est d'ordre 2.

__Lemme:__ Soit $f \in \mathcal{C}^2(I)$ telle que f'' soit bornée par M_2

$$\left| \int_\alpha^\beta f(t)\,dt - (\beta-\alpha) f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \right| \leq \frac{M_2}{24}(\beta-\alpha)^3$$

__Preuve:__ Soit $\gamma = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$ on a $\displaystyle\int_\alpha^\beta (t-\gamma) f'(\gamma)\,dt = f'(\gamma)\left[\frac{\left(\beta - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2}{2} - \frac{\left(\alpha - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2}{2}\right]$

$$= f'(\gamma)\left[\frac{(\beta-\alpha)^2}{4} - \frac{(\alpha-\beta)^2}{4}\right] = 0$$

d'où $\displaystyle(\beta-\alpha) f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \int_\alpha^\beta \big(f(\gamma) + (t-\gamma) f'(\gamma)\big)\,dt$

et $$\left|\int_\alpha^\beta f(t)\,dt - (\beta-\alpha) f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right| = \left|\int_\alpha^\beta \big(f(t) - f(\gamma) - (t-\gamma) f'(\gamma)\big)\,dt\right|$$

$$\leq \int_\alpha^\beta |f(t) - f(\gamma) - (t-\gamma) f'(\gamma)|\,dt$$

Par Taylor-Lagrange $|f(t) - f(\gamma) - (t-\gamma) f'(\gamma)| \leq \dfrac{M_2}{2}(t-\gamma)^2$

d'où $$\left|\int_\alpha^\beta f(t)\,dt - (\beta-\alpha) f(\gamma)\right| \leq \frac{M_2}{2}\int_\alpha^\beta (t-\gamma)^2\,dt = \frac{M_2}{2}\frac{(\beta-\alpha)^3}{12}$$

On déduit du lemme :

$$\left|\int_I f(t)\,dt - M_n(f)\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,dt - \frac{b-a}{n} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)\right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,dt - \frac{b-a}{n} f\left(\frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right)\right|}_{\leq \frac{M_2}{24}(x_i - x_{i-1})^3 = \frac{M_2}{24n^3}(b-a)^3}.$$

d'où $$\left|\int_I f(t)\,dt - M_n(f)\right| \leq \frac{M_2}{24n^2}(b-a)^3.$$

et $$\boxed{E_n \leq \frac{M_2}{24n^2}(b-a)^3}$$

<u>Méthode des trapèzes</u>

<u>Théorème</u> : Soit $f \in \mathcal{C}^2$ telle que f'' soit bornée par M_2, $$E_n = \left|\int_I f(t)\,dt - T_n(f)\right| \leq \frac{M_2}{12n^2}(b-a)^3$$

<u>Remarque</u> :
La méthode des trapèzes est donc deux fois moins précise que la méthode des rectangles médians.

Chapitre IV. Séries de Fourier

. Très utilisées dans l'ensemble des sciences de l'ingénieur : traitement du signal, compression d'images (JPEG). Voir le cours intitulé Vibrations.

On étudie les fonctions périodiques. Si f est T-périodique alors la fonction g définie par $g(x) = f(\frac{T}{2\pi}x)$ est 2π-périodique.

3.1 Polynômes trigonométriques

Proposition : a) Si m et p sont 2 entiers positifs distincts.

on a $$\int_0^{2\pi} \cos(m\theta)\cos(p\theta)\,d\theta = \int_0^{2\pi} \sin(m\theta)\sin(p\theta) = 0.$$

b) si $m, p \in \mathbb{N}$ $$\int_0^{2\pi} \cos(mp)\sin(p\theta)\,d\theta = 0.$$

Preuve : a) on se souvient que $\boxed{\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)}$.

donc $$\int_0^{2\pi} \cos(m\theta)\cos(p\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\cos((m+p)\theta) + \cos((m-p)\theta)\right)d\theta$$

une primitive de $\theta \longmapsto \cos((m+p)\theta)$ est $\theta \longmapsto \frac{\cos((m+p)\theta)}{m+p}$

" " $\theta \longmapsto \cos((m-p)\theta)$ est $\theta \longmapsto \frac{\cos((m-p)\theta)}{m-p}$

donc $$\int_0^{2\pi} \cos(m\theta)\cos(p\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}\,\frac{\sin((m+p)2\pi) - \sin(0)}{m+p} + \frac{1}{2}\,\frac{\sin((m-p)2\pi) - \sin 0}{m+p}$$

$$= 0.$$

on a $\boxed{\sin a \sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) - \cos(a-b)\right]}$ et on obtient le même résultat

b) $\boxed{\cos a \sin b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]}$.

Si $m \neq p$ alors $$\int_0^{2\pi} \cos(m\theta)\sin(p\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\sin((m+p)\theta) + \sin((m-p)\theta)\right)d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left[-\frac{\cos((m+p)\theta)}{m+p}\right]_0^{2\pi} + \left[\frac{\cos((m-p)\theta)}{m-p}\right]_0^{2\pi}\right)$$

$= 0$

Si $m = p$ on a $\cos(m\theta)\sin(p\theta) = \frac{1}{2}\sin(2m\theta)$.

si $m = 0$ alors on intègre la fonction nulle.

si $m \neq 0$ alors $\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin(2m\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(2m\theta)}{2m}\right]_0^{2\pi} = 0$.

<u>Définition :</u> On appelle polynôme trigonométrique, une fonction de la forme

$$F(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(k\theta) + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin(k\theta).$$

F est la combinaison linéaire de "signaux élémentaires".

Comment peut-on retrouver à partir de F les constantes a_k et b_k ?

- $$\int_0^{2\pi} F(\theta)\cos(m\theta)\,d\theta = \frac{a_0}{2}\int_0^{2\pi}\cos(m\theta)\,d\theta + \sum_{k=1}^{n} a_k \int_0^{2\pi}\cos(k\theta)\cos(m\theta)\,d\theta + \sum_{k=1}^{n} b_k \int_0^{2\pi}\sin(k\theta)\cos(m\theta)\,d\theta.$$

par la proposition précédente, on sait que $\int_0^{2\pi}\cos(m\theta)\cos(k\theta)\,d\theta = \int_0^{2\pi}\sin(m\theta)\sin(k\theta)\,d\theta = 0$

et $\int_0^{2\pi}\cos(m\theta)\sin(k\theta)\,d\theta = 0$ si $m \neq k$.

donc : $$\int_0^{2\pi} F(\theta)\cos(m\theta)\,d\theta = a_m\int_0^{2\pi}\cos^2(m\theta)\,d\theta$$

$\cos(a)^2 = \frac{1}{2}(1-\cos 2a)$.

$$= a_m \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(1-\cos(2m\theta))\,d\theta$$

$$= a_m\,\frac{1}{2}\left(2\pi - \left[\frac{\sin(2m\theta)}{2m}\right]_0^{2\pi}\right) = a_m\pi.$$

on en déduit $$\boxed{a_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\theta)\cos(m\theta)\,d\theta}$$

De même, on obtient $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\theta)\,d\theta$ et $b_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\theta)\sin(m\theta)\,d\theta$.

Définis de cette façon les coefficients a_m et b_m ont un sens pour des fonctions bien plus générales que les polynômes trigonométriques : il faut que la fonction F soit intégrable sur $[0, 2\pi]$. On la prendra continue (par morceaux).

3.2 Coefficients de Fourier

Soit F une fonction continue 2π-périodique : c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) = f(x+2\pi)$.

Définition : Pour tout $m \geq 0$ on pose $a_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\theta)\cos(m\theta)\,d\theta$

Pour tout $m \geq 1$ on pose $b_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\theta)\sin(m\theta)\,d\theta$.

On appelle série de Fourier formelle de F la série

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k\geq 1} a_k \cos(k\theta) + \sum_{k\geq 1} b_k \sin(k\theta).$$

Remarques :

1) on a vu que si F est un polynôme trigonométrique alors F coïncide avec sa série de Fourier formelle.

2) Par formelle, on entend que la série n'est pas toujours bien définie. En fait l'essentiel de la théorie est de trouver les conditions sur F pour que celle-ci coïncide avec la série de Fourier.

Proposition : Soit F une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ 2π-périodique. On note (a_k) et (b_k) ses coefficients de Fourier

a) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$
$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} F(\theta)\cos(k\theta)\,d\theta$$
$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} F(\theta)\sin(k\theta)\,d\theta.$$

b) Si F est une fonction paire alors : $\forall k \geq 1$, $b_k = 0$

Si F est une fonction impaire alors : $\forall k \geq 0$ $a_k = 0$.

Preuve : a) résulte de la 2π-periodicité de la fonction $\theta \longmapsto F(\theta)\cos(k\theta)$.

en effet on a $\displaystyle\int_0^{\alpha} F(\theta)\cos(k\theta)\,d\theta = \int_{2\pi}^{\alpha+2\pi} F(\theta)\cos(k\theta)\,d\theta$

d'où
$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} F(\theta)\cos(k\theta)d\theta = \int_{\alpha}^{0} F(\theta)\cos(k\theta)\,d\theta + \int_0^{2\pi} F(\theta)\cos(k\theta)d\theta + \int_{2\pi}^{2\pi+\alpha} F(\theta)\cos(k\theta)\,d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} F(\theta)\cos(k\theta)\,d\theta.$$

b) : si F est paire alors $\theta \longmapsto F(\theta)\sin(k\theta)$ est impaire.

on a
$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\theta)\sin(k\theta)\,d\theta = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} F(\theta)\sin(k\theta)\,d\theta + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} F(\theta)\sin(k\theta)\,d\theta$$
$$= -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} F(-\theta)\sin(+k\theta)\,d\theta + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} F(\theta)\sin(k\theta)\,d\theta = 0.$$

Proposition (Lemme de Riemann - Lebesgue)

Si F est continue (par morceaux) sur $[a,b]$ (et 2π-périodique)

alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_a^b F(\theta)\cos(n\theta)\,d\theta = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b F(\theta)\sin(n\theta)\,d\theta = 0.$

Preuve: Une fonction continue sur un intervalle fermé est bornée.

Soit donc $M \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall x \in [a,b] \quad |f(x)| \leq M$.

on a $$\left|\int_a^b F(\theta)\cos(n\theta)\,d\theta\right| \leq \int_a^b |F(\theta)\cos(n\theta)|\,d\theta$$

on effectue le changement de variable $u = n\theta$.

$$\int_a^b |F(\theta)\cos(n\theta)|\,d\theta = \int_{na}^{nb} \underbrace{\left|F\left(\tfrac{u}{n}\right)\cos(u)\right|}_{\leq \left|F\left(\frac{u}{n}\right)\right|}\frac{du}{n} \leq \frac{1}{n}\int_{na}^{nb}\underbrace{\left|F\left(\tfrac{u}{n}\right)\right|}_{\leq M}du$$

$$\leq \frac{M}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Corollaire: $a_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ et $b_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$

Remarque: Ce corollaire indique déjà que la série formelle ne diverge pas grossièrement

Théorème de Dirichlet

- Soit F une fonction continue par morceaux 2π-périodique telle que pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$ les rapports $\dfrac{F(t_0+h)-F(t_0)}{h}$ et $\dfrac{F(t_0-h)-F(t_0)}{h}$ ont des limites quand h tend vers 0 (appelée dérivée à droite et dérivée à gauche) alors pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$

$$\frac{F(t_0^+) - F(t_0^-)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(kt_0) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k\sin(kt_0)$$

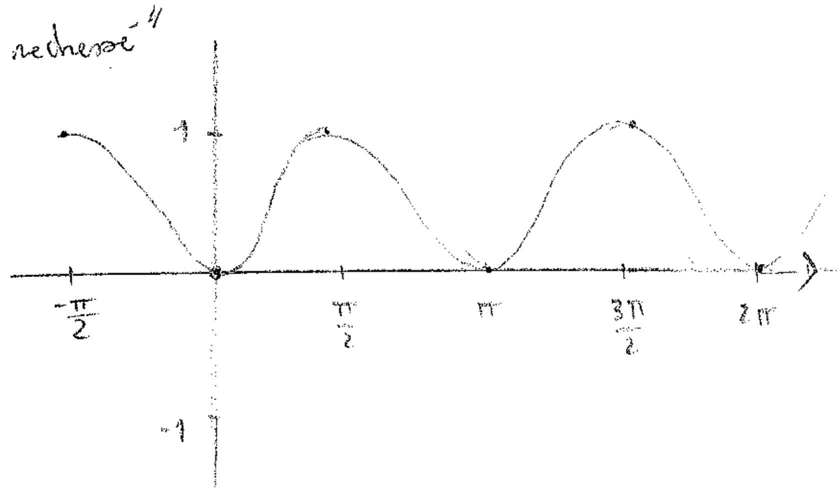
- Si F est continue alors $\displaystyle F(t_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(kt_0) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k\sin(kt_0).$

Exemples : On présente 7 exemples fondamentaux

Trouvons l'expression de la série de Fourier formelle et étudions la convergence dans les cas suivants :

$$\boxed{a) \quad f(\theta) = |\sin\theta|}$$

"sinus redressé"



$b_k = 0$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |\sin\theta| \cos(k\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin\theta \cos(k\theta)\, d\theta - \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} \sin\theta \cos(k\theta)\, d\theta.$$

Rappel : $\sin a \cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$.

$$= \frac{1}{\pi} \times \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left[\sin((k+1)\theta) + \sin(\theta(1-k))\right] d\theta - \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{2}\int_{\pi}^{2\pi}\left[\sin((k+1)\theta) + \sin(\theta(1-k))\right] d\theta$$

$$= \frac{1}{\pi} \times \left(\frac{1}{2}\left[-\frac{\cos((k+1)\theta)}{k+1}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{2}\left[\frac{\cos(k-1\theta)}{k-1}\right]_0^{\pi}\right) - \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{2}\left(\left[-\frac{\cos(k+1)\theta}{k+1}\right]_{\pi}^{2\pi} + \left[\frac{\cos((k-1)\theta)}{k-1}\right]_{\pi}^{2\pi}\right)$$

Si $k \neq 1$

$$= \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{2}\left(\frac{(-1)^{k+2}+1}{k+1} + \frac{(-1)^{k-1}-1}{k-1}\right) - \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{k+1} + \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} + \frac{1-(-1)^{k-1}}{k-1}\right).$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1+(-1)^k}{k+1} - \frac{1+(-1)^k}{k-1} + \frac{1}{k+1} - \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} - \frac{1}{k-1} + \frac{(-1)^{k-1}}{k-1}\right).$$

$$a_k = \frac{1}{2\pi}\left(2\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k-1}\right) + 2\left(\frac{(-1)^k}{k+1} - \frac{(-1)^k}{k-1}\right)\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est impair} \\ \frac{2}{\pi}\,\frac{k-1-(k+1)}{k^2-1} = \frac{4}{\pi(1-k^2)} \end{cases}$$

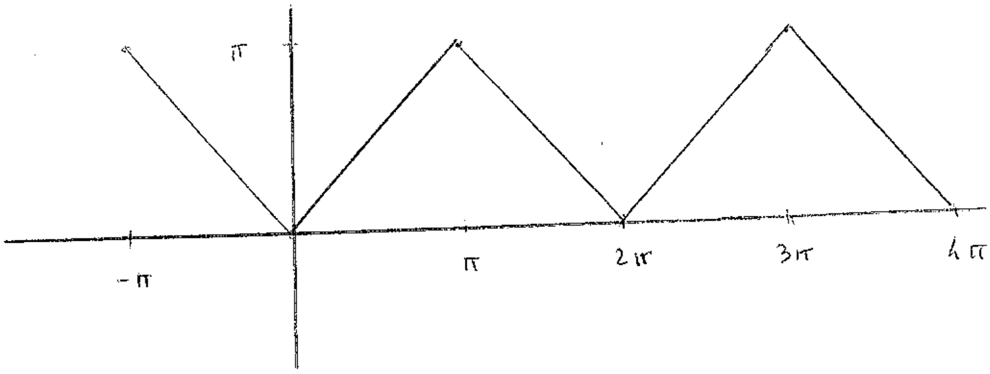
$a_1 = 0$ et $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |\sin\theta|\, d\theta = \frac{2}{\pi}$.

$f(\theta) = |\sin\theta|$ est une fonction continue qui admet des dérivées à droite et à gauche donc $f(\theta) = \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(1-4k^2)} \cos(2k\theta)$.

en particulier $f(0) = 0 = \frac{2}{\pi} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(4k^2-1)}$

donc $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}$.

b) $\boxed{f(\theta) = |\theta| \text{ pour } -\pi \leq \theta \leq \pi. \quad 2\pi\text{-périodique}}$



f est une fonction paire donc les b_n sont nuls

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\theta| d\theta = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -\theta \, d\theta + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \theta \, d\theta$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \theta \, d\theta = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{2}\right) = \pi.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\theta| \cos(n\theta) \, d\theta = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \underset{u}{\theta} \underset{v'}{\cos(n\theta)} \, d\theta$$

car la fonction $\theta \mapsto |\theta|\cos(n\theta)$ est paire.

par IPP

$$= \underbrace{\frac{2}{\pi}\left[\theta \frac{\sin(n\theta)}{n}\right]_0^{\pi}}_{0} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin n\theta}{n} \, d\theta.$$

$$= -\frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos(n\theta)}{n^2}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^n - 1}{n^2}.$$

$$|\theta| = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \underbrace{\frac{(-1)^n - 1}{n^2}}_{0 \text{ si } n \text{ est pair}} \cos(n\theta).$$

$$|\theta| = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos((2k+1)\theta)}{(2k+1)^2}.$$

avec $\theta = 0$, on obtient

$$\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi}{2}$$

d'où $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

On en déduit $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$: on sait que cette série converge. (par le critère de Riemann)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

On a donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{4}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{4}{3} \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^6}{6}$.

c) $\boxed{\text{fonction créneaux}}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \le x < \pi \\ -1 & \text{si } \pi \le x < 2\pi \end{cases}$$

Série de Fourier $\displaystyle\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin((2k+1)x)}{(2k+1)}$

d) $\boxed{\text{fonction en portes}}$: $\alpha \in]0, \pi[$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \le |x| < \alpha \\ 0 & \text{si } \alpha \le |x| < \pi \end{cases}$$

Série de Fourier :

$$\frac{\alpha}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(k\alpha)}{k} \cos(kx)$$

e) $\boxed{\text{fonction en dents de scie}}$

$f(x) = x$ si $-\pi \le x < \pi$

Série de Fourier

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin(kx)$$

f) $\boxed{\text{fonction parabolique}}$

$f(x) = x^2$ si $-\pi \le x < \pi$

Série de Fourier

$$\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos(kx)$$