Université Sorbonne Paris Nord Année 2020/2021
Clément Foucart

Exercices de Probabilités pour le Master Enseignement 1 (1ère partie).

1 Dénombrement et espaces probabilisés.

1.1 Rudiments sur les ensembles et dénombrement

Exercice 1.1 Soit Ω un ensemble fini. Démontrer que si card $(\Omega) = n$ alors $\text{card}(\mathcal{P}(\Omega)) = 2^n$.

Exercice 1.2 Montrer de deux façons différentes que pour tous $n, p \in \mathbb{N}$,

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p} \quad \text{et} \quad \binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}.$$

Exercice 1.3 Soient A , B et C trois parties d'un même ensemble E.

1. Justifier :
$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \quad \text{et} \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$
2. Justifier les relations ensemblistes suivantes :
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad \text{et} \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$
3. Donner une forme simplifiée des expressions :
$$(A \cup B) \cap (A \cup B^c) \quad \text{et} \quad (A \cup B) \cap (A^c \cup B) \cap (A^c \cup B^c).$$

Exercice 1.4 Combien d'anagrammes peut-on obtenir en utilisant les lettres PHYSIQUE ? les lettres MATHEMATIQUES ?

Exercice 1.5 Une classe comporte 20 étudiants. Douze filles et huit garçons. Le professeur décide de désigner un groupe de travail de trois élèves chargé de préparer un devoir maison.
1) Combien de groupes de travail de trois élèves est il possible de former ?
2) Combien y a-t-il de groupes constitués de trois filles ?
3) Combien y a-t-il de groupe avec deux filles et un garçon ?

Exercice 1.6 On organise un championnat de Curling. Sept équipes sont qualifiées.

1. Si chaque équipe rencontre une seule fois chacune des autres équipes, quel nombre de matchs doit-on prévoir ?
2. Si chaque équipe rencontre deux fois chacune des autres équipes (match aller, match retour) quel nombre de matchs doit-on prévoir ?

Exercice 1.7 Un étudiant va acheter trois livres de math et deux bandes dessinées. Dans le magasin, il y a dix livres de math et vingt bandes dessinées.

1. De combien de façons l'étudiant peut-il faire ses achats ?
2. De retour chez lui, il forme une pile avec ses nouveaux livres. De combien de façons peut-il le faire ?
3. Même question si l'étudiant souhaite que ses livres de math se trouvent en bas de la pile, et ses bandes dessinées en haut.
4. Même question si l'étudiant souhaite que ses livres de math se suivent dans la pile (mais pas nécessairement les bandes dessinées).

Exercice 1.8 10 livres doivent être rangés dans une bibliothèque, dont 4 livres de maths, 3 livres de chimie, 2 livres de littérature, et 1 d'histoire. On souhaite ranger les livres de manière que les livres du même sujet soient regroupés sur l'étagère. Combien d'arrangements sont possibles ?

Exercice 1.9 1) On appelle partage par paire d'un ensemble toute partition dont les parties contiennent chacune deux éléments. Quel est le nombre de partages par paires d'un ensemble de $2n$ éléments ?

2) On considère 32 joueurs de tennis, de combien de façons peut-on organiser le premier tour d'un tournoi de tennis en simple ? En double ?

2 Univers et premiers calculs

Exercice 2.1 On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et trois événements A, B et C. Exprimer chacun des événements suivants à l'aide des opérations d'union, intersection et passage au complémentaire :
« A et B se réalisent, mais pas C » ;
« au moins un des trois événements A , B, C se réalise » ;
« au plus un des trois événements A , B, C se réalise » ;
« aucun des trois événements A , B, C ne se réalise » ;
« les trois événements A , B, C se réalisent ».

Exercice 2.2 Donner un univers (on dit aussi espace des états, ou ensemble fondamental) pour les expériences aléatoires suivantes :

— Lancer d'une pièce de monnaie.
— Deux lancers successifs d'une même pièce de monnaie
— Lancer d'un dé
— Deux lancers successifs d'un même dé, et on s'intéresse à la somme des nombres obtenus
— Lancer d'un même dé indéfiniment
— Durée de vie d'un humain
— Promenade d'un ivrogne dans une rue (un pas en avant, un pas en arrière)

Exercice 2.3 Décrire les événements suivants comme des sous-ensembles de l'espace des états Ω.

— On obtient pile
— Le premier jet donne face

— La somme des résultats donne 4
— Le premier 1 est obtenu au N-ième lancer
— L'individu atteint au moins 50 ans
— L'ivrogne avance au N-ième pas.

Exercice 2.4 Soit Ω l'univers associé à l'expérience aléatoire consistant à lancer une pièce trois fois. Soit A l'événement « Face apparaît deux fois » , B l'événement « Face apparaît au moins deux fois » et C l'événement « Face apparaît lorsque Pile est apparu au moins une fois » . Donner les éléments de A, B, C, et décrire $A^c \cap B$, $A^c \cap B^c$, $A \cap C$.

Exercice 2.5 Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé quelconque (ici Ω n'est pas forcément fini).

— On considère $n+1$ événements $A_1, ..., A_n, A$ tels que $A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n \subset A$. Montrer que

$$\mathbb{P}(A) \geq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - (n-1).$$

— Un système est constitué de 3 composants, chacun tombant en panne avec probabilité 3/4. Donner une minoration de la probabilité que les 3 composants tombent en panne simultanément.

Exercice 2.6 On suppose que dans une course il y a n chevaux au départ et qu'ils ont la même chance de gagner. Calculer la probabilité de gagner le tiercé dans l'ordre, la probabilité de gagner le tiercé dans l'ordre ou dans un ordre différent, la probabilité de gagner le tiercé dans un ordre différent.

Exercice 2.7 (Dénombrement) Un joueur de poker reçoit une main de 5 cartes d'un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité qu'il reçoive :
— une seule paire (deux cartes de même hauteur)
— deux paires
— un brelan (exactement trois cartes de même hauteur, et pas de paire)
— un carré (quatre carte de même hauteur)
— un full (un brelan et une paire) ?

Exercice 2.8 (Dénombrement) Au loto, le joueur doit cocher 6 numéros dans une grille en comportant 49. Un tirage consiste à extraire, sans remise, 6 boules numérotées d'une urne, dont les numéros sont dits gagnants, et une 7-ième boule fournissant le numéro complémentaire. On est gagnant
— au premier rang : si on a coché les 6 numéros gagnants
— au second rang : si on a coché 5 numéros gagnants et que le 6-ème est le numéro complémentaire
— au troisième rang, si on a coché 5 numéros gagnants.

On considère une grille et on note

$$p_k = \mathbb{P}(\text{la grille est gagnante au k-ième rang}).$$

Calculer p_k pour $k \in 1, 2, 3$.

Exercice 2.9 (Dénombrement) Quelle est la probabilité pour que sur k personnes, deux au moins aient leur anniversaire le même jour ? (on supposera qu'une année est composée de 365 jours). Pour quelles valeurs de k cette probabilité est $\geq 1/2$?

Exercice 2.10 (Indépendance) On considère un système formé de six machines identiques dont la probabilité d'être en fonctionnement est p. Les fonctionnements des différents appareils sont supposés indépendants. Les machines peuvent être reliées de différentes façons :

— elles sont dites "en série" si et seulement si le système est en panne dés que l'une des machines est en pannes.

— elles sont dites "en parallèle" si et seulement si le système fonctionne dés que l'une des machines fonctionne.

Quelle est la probabilité que le système fonctionne lorsque :

— on a six machines en série ?

— on a six machines en parallèle ?

— on a deux groupes en série constituées chacune de trois machines en parallèle ?

Exercice 2.11 (Formule de Bayes) Un antivirus assure avec une fiabilité de $a = 95\%$ la détection d'un malware M lorsqu'il est effectivement présent. Cependant, le test indique aussi un résultat faussement "positif" pour $b = 1\%$ des systèmes réellement sains à qui on l'applique. On suppose qu 'une proportion $p = 0.5\%$ des systèmes ont le malware M.
1) En considérant que les paramètres a, b et p sont des probabilités, déterminer la probabilité qu'un système soit vraiment atteint sachant qu'il a un test positif ?
2) On suppose maintenant que a, b et p sont définis comme ci dessus mais qu'on ne connait plus leur valeur numérique. On estime que le test est utile s'il y a moins de 30% de faux négatifs. A quelles conditions sur ces valeurs le test est-il utile ?

Exercice 2.12 Une famille a deux enfants. On cherche la probabilité que les deux enfants soient des garçons, sachant qu'au moins un est un garçon ?

1) Prenons en compte l'âge des enfants : le plus jeune et le plus âgé peuvent être chacun des garçons. Donner l'univers. On suppose que chaque configuration a la même probabilité.
2) Calculer la probabilité.
3) Sachant maintenant que le plus jeune enfant est un garçon, quelle est la probabilité que les deux soient des garçons ?

Exercice 2.13 Montrer que la probabilité qu'*exactement* un des événements A et B se réalise est

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2\mathbb{P}(A \cap B)$$

Exercice 2.14 Trois usines pharmaceutiques A, B, et C produisent respectivement 40%, 35% et 25% du nombre total de comprimés achetés par un grossiste. Chacune de ces usines produit respectivement 5, 6, et 3% de comprimés défectueux. Le qualiticien de l'entreprise reçoit une nouvelle livraison.

1. Déterminer les probabilités des différentes possibilités suivantes : provenir de A et être défectueux, provenir de A et être conforme, provenir de B et être défectueux, provenir de B et être conforme, provenir de C et être défectueux, provenir de C et être conforme.
2. Dans cette livraison, on prend un comprimé au hasard. Quelle est la probabilité p_1 pour qu'il soit défectueux ? Quelle est la probabilité p_2 pour qu'il soit conforme ?
3. Dans cette livraison, on prend un comprimé au hasard, on constate qu'il est défectueux. Quelle est la probabilité qu'il ait été fabriqué dans l'usine A ?

Exercice 2.15 Une urne contient cinq boules roules et trois boules noires. On tire au hasard une boule. Si cette boule est noire, on arrête le jeu. Si cette boule est rouge, on replace la boule dans le sac, on ajoute deux boules rouges et on procède à un deuxième tirage.

1) Représenter l'expérience à l'aide d'un arbre pondéré.
2) Quelle est la probabilité de tirer deux boules rouges ?

Exercice 2.16 (Garçon ou Fille) Une famille a deux enfants. On cherche la probabilité que les deux enfants soient des garçons, sachant qu'au moins est un garçon ?

1) Prenons en compte l'âge des enfants : le plus jeune et le plus âgé peuvent être chacun des garçons. Donner l'univers. On suppose que chaque configuration a la même probabilité.
2) Calculer la probabilité.
3) Sachant maintenant que le plus jeune enfant est un garçon, quelle est la probabilité que les deux soient des garçons ?

Exercice 2.17 (Allèle) On suppose qu'un gène est formé de deux allèles A et a. Un individu peut avoir l'un des trois génotypes AA, Aa, aa.
Un enfant hérite d'un allèle de chacun de ses parents, chacun d'eux étant choisi au hasard. Par exemple si le père est de type Aa, et la mère AA, alors les enfants peuvent être du types AA ou Aa.
On considère une population dont les proportions des génotypes pour les hommes comme pour les femmes sont de p_0 pour AA, q_0 pour Aa, r_0 pour aa.

1) On suppose que le génotype de l'enfant est formé au hasard, on le note (x, y) avec x le génotype de son père et y celui de sa mère.
   a) Quelle est la probabilité qu'un enfant ait deux parents de type AA ?
   b) un parent de type AA et un parent de type Aa ?
   c) deux parents de type Aa ?
2) quelle est la probabilité que l'enfant soit de type AA sachant que :
   a) les deux parents sont de type AA ?
   b) un des deux parents est de type AA et l'autre de type Aa ?
   c) les deux parents sont de types Aa ?

3)-a Calculer la probabilité p_1 pour que l'enfant soit de type AA
b) calculer la probabilité r_1 pour que l'enfant soit de type aa
c) calculer la probabilité q_1 que l'enfant soit de type Aa

Exercice 2.18 (Urnes) On considère deux urnes. Chaque urne contient des boules colorées. La première urne contient 2 boules blanches et 3 boules noires. La deuxième urne contient 3 blanches et 4 noires. On tire une boule au hasard dans la première urne et on la place dans la deuxième. On suppose que toutes les boules ont la même chance d'être tirée (rappeler le nom de cette hypothèse). On tire alors au hasard une boule dans la deuxième urne et on l'examine. Quelle est la probabilité que la boule soit noire ?

Exercice 2.19 (Domino) Un domino est un rectangle comportant deux parties $[i|j]$. Sur chacune de ces parties figurent entre 0 et 6 points. Les dominos $[i|j]$ et $[j|i]$ ne sont pas distingués.

1. Combien de dominos différents peut-on ainsi obtenir ?
2. On suppose que l'on a un jeu complet de dominos. On prend l'un de ces dominos au hasard.
   (a) Quelle est la probabilité que ce soit un double ?

(b) Quelle est la probabilité que la somme des points soit 6 ?

(c) Quelle est la probabilité que ce soit un double si l'on sait que la somme des points vaut 6 ?

3. On retire du jeu les dominos dont la somme des points est 6, et on en tire un parmi les dominos restants. Quelle est la probabilité que ce soit un double ?
4. On dit que des dominos sont amis si l'une de leurs parties a le même nombre de points. A partir du jeu complet, on tire deux dominos. Quelle est la probabilité qu'ils soient amis ?

Exercice 2.20 (Formule de Bayes et application) Pour lutter contre les spams, les messageries ont mis en place des techniques en repérant certains mots ou expressions [1] pouvant figurer dans les emails : imaginons par exemple l'ensemble de mots

$$\mathcal{M} = \{\text{merveilleux}\,;\ \text{gratuit}\,;\ \text{argent}\,;\ \text{vous avez gagné}\,;\ \text{cadeau}\}.$$

La messagerie *détecte* un potentiel spam si ces mots sont présents dans l'email. Le filtre fonctionne alors de la façon suivante :

Soient les événements D=« détection » et S=« l'email est un spam ». Si la probabilité d'être un spam sachant qu'il y a détection, $\mathbb{P}_D(S)$, dépasse le seuil de 90%, l'email est considéré réellement comme un spam et déplacé dans les courriers indésirables. Sinon il n'est pas déplacé et n'est pas considéré comme spam.

1) Redémontrer la formule de Bayes

$$\mathbb{P}_D(S) = \frac{\mathbb{P}_S(D)\mathbb{P}(S)}{\mathbb{P}_S(D)\mathbb{P}(S) + \mathbb{P}_{S^c}(D)\mathbb{P}(S^c)}.$$

2) Lorsque vous recevez un email contenant les mots $\mathcal{M}$, la messagerie compte le nombre d'emails déjà considérés comme indésirables, qui contiennent $\mathcal{M}$ et estime par les proportions, les probabilités $\mathbb{P}_S(D)$ et $\mathbb{P}_{S^c}(D)$. Supposons par exemple qu'il y a 70% des spams dans les indésirables qui contiennent $\mathcal{M}$, et 15% des non-spams qui le contiennent. On suppose de plus $\mathbb{P}(S) = 0.7$. Dans ces conditions si vous recevez un email contenant ce mot sera-t-il déplacé dans les courriers indésirables ? L'est-il si $\mathbb{P}(S) = 0.5$?

3) On considère maintenant une famille de n mots. Pour tout $i \in \{1, .., n\}$, on appelle M_i l'événement « le i-ème mot est présent ». On suppose que les événements $(S \cap M_i)_{i\geq 1}$ sont indépendants, ainsi que les événements $(S^c \cap M_i)_{i\geq 1}$. L'événement de détection D correspond à avoir tous les mots dans le mail.
   — Ecrire D à l'aide d'intersections.
   — On note $p_i = \mathbb{P}_S(M_i)$, $q_i = \mathbb{P}_{S^c}(M_i)$ et $s = \mathbb{P}(S)$, démontrer que :

$$\mathbb{P}_D[S] = \frac{s^n p_1 p_2 ... p_n}{s^n p_1 p_2 ... p_n + (1-s)^n q_1 q_2 ... q_n}.$$

Indication : remarquer que $M_1 \cap M_2 \cap S = M_1 \cap S \cap M_2 \cap S$.

1. A plan for spam http ://www.paulgraham.com/spam.html, voir aussi *filtrage bayésien anti-spam dans wikipedia* (qui contient des erreurs de maths !)

4) On suppose qu'il y a les 5 mots et expressions suivants dans notre filtre.

Mot :	merveilleux	argent	gratuit	cadeau	vous avez gagné
parmi les spams :	70%	75%	40%	60%	85%
parmi les non-spams :	30%	15%	10%	60%	2%

Si $s = 0.5$, un mail contenant ces 5 mots sera-t'il déplacé en indésirable ? Qu'en est-il s'il contient seulement les mots « argent » et « gratuit » ?

Exercice 2.21 On dispose de deux pièces A et B.
- La pièce A est équilibrée, au sens où elle donne face et pile avec probabilité $\frac{1}{2}$.
- La pièce B donne face avec probabilité p et pile avec probabilité $1 - p$

On effectue une succession de lancers selon le procédé suivant :
- On choisit une des deux pièces A, B au hasard, on la lance
- A chaque lancer, si on obtient face, on garde la pièce pour le lancer suivant, sinon on change de pièce.

Pour tout entier naturel, on note A_n l'événement

« le n-ième lancer se fait avec la pièce A »

Etudier la suite $(a_n, n \geq 1)$ définie par $a_n = \mathbb{P}(A_n)$ pour tout $n \geq 1$. Commenter vos résultats. *Indication : sortez votre cours sur les suites arithmético-géométriques.*

Exercice 2.22 On dispose de deux dés, l'un honnête , et l'autre pipé pour lequel la probabilité d'obtenir 6 est 1/3 tandis que les autres faces ont toutes la même probabilité.
1) On choisit un dé au hasard et on le lance. Quelle est la probabilité de faire 6 ?
2) On choisit un dé au hasard et on le lance 4 fois. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois 6 ?
3) On joue 4 fois en choisissant chaque fois au hasard l'un des dés. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois 6 ?

Exercice 2.23 On note Ω l'ensemble des huit résultats de trois lancers successifs d'une pièce de monnaie et on considère les deux événements suivants : A="le premier jet donne un pile", B="pile est amené au moins deux fois". Si on suppose que tous les éléments de Ω sont équibrobables, A et B sont-ils indépendants ?

3 Variables aléatoires et lois discrètes.

Exercice 3.1 1) Déterminer α, β, γ tels que pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{\alpha}{k} + \frac{\beta}{k+1} + \frac{\gamma}{k+2}$.
2) Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer a pour que la suite $(p_k)_{k\geq 1}$ définie par $p_k = \frac{a}{k(k+1)(k+2)}$, caractérise une loi de probabilité.
3) Cette loi de probabilité admet elle une espérance ? une variance ?

Exercice 3.2 Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On en tire n une à une ($n \leq N$). On étudiera d'abord le cas **avec remise**, puis **sans remise**. Soient X et Y le plus petit et le plus grand des nombres obtenus. Calculer $\mathbb{P}(X \geq x)$ pour tout $x \in [|1, n|]$. En déduire la loi de X. Calculer $\mathbb{P}(Y \leq y)$ pour tout $y \in [|1, n|]$. En déduire la loi de Y.

Exercice 3.3 Calculer la fonction de répartition de :
- la loi uniforme sur $\{1, ..., n\}$
- la loi de Bernoulli de paramètre p
- la loi Binomiale de paramètres 4 et $\frac{1}{2}$
- la loi géométrique de paramètre p.

Exercice 3.4 Soit n un entier ≥ 1. On considère l'expérience aléatoire qui consiste à lancer successivement n fois un dé (équilibré) et à noter les n résultats obtenus (dans l'ordre).

1. Décrire l'univers Ω associé à cette expérience aléatoire. Déterminer le cardinal de Ω.
2. Calculer la probabilité de l'évènement $A =$« on obtient au moins un 6 ».
3. Démontrer que pour avoir une probabilité supérieure ou égale à $0,9$ d'obtenir au moins un 6, il faut et il suffit que :
$$n \geq \frac{\ln(10)}{\ln(6) - \ln(5)}$$

Exercice 3.5 Le trousseau de clefs d'un gardien de nuit comporte dix clefs, dont une seule ouvre la porte du poste de garde. Pour qu'il y pénètre, il y a deux scenarios possibles :

• Cas A : il prend une clef au hasard, l'essaie, la met de côté si elle n'ouvre pas, et ainsi de suite.

• Cas B : il prend une clef au hasard, l'essaie, mais la laisse sur le trousseau si elle n'ouvre pas, et ainsi de suite.

On désigne respectivement par X_A et X_B les variables aléatoires égales aux nombres d'essais (y compris le bon) avant succès, dans le premier et le second scenario. Déterminer la loi de probabilité et la fonction de répartition de X_A et de X_B.
Calculer $\mathbb{E}[X_A]$ et $\mathbb{E}[X_B]$.

Le gardien utilise la méthode B un jour sur trois. Un jour, après avoir essayé 8 clefs, il n'a toujours pas ouvert la porte. Quelle est la probabilité pour qu'il ait utilisé la méthode B ?

Exercice 3.6 Soit n un entier naturel non nul. Une personne effectue n lancers indépendants d'une pièce parfaitement équilibrée. Soit X_n le nombre de "piles" obtenus.

1) Quelle est la loi de X_n ? quelle est son espérance ? sa variance ?
2) Calculer la probabilité pour qu'à l'issue des n lancers, le nombre de piles soit strictement supérieur au nombre de faces.

Exercice 3.7 Une urne contient initialement une boule blanche et une boule rouge.
On effectue des tirages successifs d'une boule dans l'urne selon le protocole suivant : après chaque tirage, la boule tirée est remise dans l'urne et on rajoute dans l'urne une boule de la même couleur, avant le tirage suivant. Pour tout entier non nul n, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues au cours des n premiers tirages.
- Déterminer la loi de X_1.
- Déterminer la loi de X_2.
- Montrer que la loi de X_n est donnée par $\mathbb{P}(X_n = k) = \frac{1}{n+1}$.

Exercice 3.8 On lance successivement n boules au hasard dans N cases numérotées de 1 à N avec $N \geq 2$. On suppose que les différents lancers de boules sont indépendants et que la probabilité pour qu'une boule quelconque tombe dans une case donnée est $\dfrac{1}{N}$. Une case peut contenir plusieurs boules. Le gain étant fonction du nombre de cases atteintes, on étudie la variable aléatoire T_n égale au nombre de cases non vides à l'issue des n lancers.

1. Déterminer en fonction de n et N les valeurs prises par T_n (on distinguera deux cas : $n \leq N$ et $n > N$).
2. Donner les lois de T_1 et T_2.
3. Déterminer, lorsque $n \geq 2$, la probabilité des événements $\{T_n = 1\}$, $\{T_n = 2\}$, $\{T_n = n\}$ (pour la dernière probabilité, on distinguera deux cas : $n > N$ et $n \leq N$).
4. À l'aide de la formule des probabilités totales, justifier l'égalité (I) suivante, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$.

$$(I) \qquad \mathbb{P}(T_{n+1} = k) = \frac{k}{N}\mathbb{P}(T_n = k) + \frac{N-k+1}{N}\mathbb{P}(T_n = k-1)$$

5. Afin de calculer l'espérance $\mathbb{E}(T_n)$ de la variable T_n, on considère la fonction polynomiale G_n définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ G_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(T_n = k)x^k$$

   (a) Quelle est la valeur de $G_n(1)$?
   (b) Exprimer $\mathbb{E}(T_n)$ en fonction de $G_n'(1)$.
   (c) En utilisant la relation (I), montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ G_{n+1}(x) = \frac{1}{N}(x - x^2)G_n'(x) + xG_n(x)$$

   (d) En dérivant l'expression précédente, en déduire que :

$$\mathbb{E}(T_{n+1}) = \left(1 - \frac{1}{N}\right)\mathbb{E}(T_n) + 1$$

   (e) Prouver enfin que l'espérance de T_n est donnée par :

$$\mathbb{E}(T_n) = N\left(1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right)$$

   (f) L'entier N étant fixé, calculer la limite de $\mathbb{E}(T_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$. Interpréter le résultat.

Exercice 3.9 On joue à pile ou face avec une pièce non équilibrée. A chaque lancer la probabilité d'obtenir pile est 2/3, et face 1/3. Les lancers sont supposés indépendants. On note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de lancers nécessaires pour l'obtention, pour la première fois de deux piles consécutifs.
Soit n un entier naturel non nul. On note p_n la probabilité de l'événement $\{X = n\}$.

1) Expliciter les événements $\{X = 2\}, \{X = 3\}, \{X = 4\}, \{X = 5\}$. Déterminer la valeur de p_1, p_2, p_3, p_4 et p_5

2) A l'aide de la formule des probabilités totales, en distinguant deux cas selon le résultat du premier lancer, montrer que

$$\forall n \geq 3, p_n = \frac{2}{9}p_{n-2} + \frac{1}{3}p_{n-1}.$$

3) Rappeler la forme générale d'une suite récurrente d'ordre 2 et en déduire l'expression de p_n en fonction de n pour $n \geq 1$.

4) X admet une espérance. Si oui, calculer $\mathbb{E}[X]$.

Exercice 3.10 Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^\star$.

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$\sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X = k) = \left(\sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(X > k)\right) - n\mathbb{P}(X > n).$$

2) On suppose que $\lim\limits_{n\to\infty} n\mathbb{P}(X > n) = 0$ et que la série $\sum_{k\geq 1} \mathbb{P}(X > k)$ converge. Montrer que X admet une espérance et que

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X > k).$$

3) Réciproquement, on suppose que X admet une espérance. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} n\mathbb{P}(X > n) = 0$$

et en déduire

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > k).$$

Exercice 3.11 Soit X une v.a.r discrète telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$. Montrer que Si $\mathbb{E}[X(X-1)]$ existe alors

$$\mathbb{E}[X(X-1)] = 2\sum_{p=2}^{\infty}\sum_{n=p}^{\infty} \mathbb{P}[X \geq n].$$

Exercice 3.12 On considère un entier naturel N supérieur ou égal à 3. Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On y effectue des tirages successifs d'une boule avec remise de la boule tirée après chaque tirage, jusqu'à obtenir pour la première fois un numéro déjà tiré. On note alors T_N le rang aléatoire de ce dernier tirage.

Par exemple, si on a obtenu successivement les numéros 1-5-4-7-3-5, la variable T_N prend la valeur 6. Alors que si on a obtenu 5-4-2-2 la variable T_N prend la valeur 4.

1) Déterminer la loi, l'espérance et la variance de T_3.
2) Soit $N \geq 3$

   a) Déterminer l'ensemble des valeurs que peut prendre T_N.
   b) Calculer $\mathbb{P}[T_N = 2]$, $\mathbb{P}[T_N = 3]$ et $\mathbb{P}[T_N = N+1]$
   c) Prouver pour tout entier k de $\{1, ..., N\}$, les égalités

$$\mathbb{P}[T_N > k] = \frac{N!}{(N-k)!N^k} = \prod_{i=0}^{k-1}\left(1 - \frac{i}{N}\right).$$

   En déduire la loi de la variable aléatoire T_N

Exercice 3.13 Considérons une urne contenant des boules blanches en proportion p, des boules noires en proportion $1-p$.
On effectue des tirages avec remise dans cette urne jusqu'à l'obtention de r boules blanches. Soit X le nombre de boules noires obtenues (avant la $r$ème boule blanche).

1) Montrer que si $0 \leq x < 1$ et $r \in \mathbb{N}^\star$, alors

$$\frac{1}{(1-x)^r} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+r-1}{r-1} x^k.$$

2) Calculer $\mathbb{P}[X=k]$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
3) Montrer que l'on obtient presque-sûrement r boules blanches
4) X admet-elle une espérance ? Si oui déterminer $\mathbb{E}[X]$ (on pourra dériver sous le signe somme en justifiant par la dérivabilité d'une fonction série entière sur son disque de convergence).

Exercice 3.14 Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On en tire n une à une ($n \leq N$). On étudiera d'abord le cas **avec remise**, puis **sans remise**.
Soit X et Y le plus petit et le plus grand des nombres obtenus

a) Calculer $\mathbb{P}(X \geq x)$ pour tout $x \in [|1, n|]$. En déduire la loi de X.
b) Calculer $\mathbb{P}(Y \leq y)$ pour tout $y \in [|1, n|]$. En déduire la loi de Y.

Exercice 3.15 Un joueur va au casino avec une fortune $a \in \mathbb{N}$. A chaque partie, il peut gagner 1 euro avec une probabilité p et perdre 1 euro avec une probabilité $q = 1-p$. Le but du joueur est alors de jouer jusqu'à l'obtention de la fortune $c \geq a$, $c \in \mathbb{N}$ mais il doit s'arrêter s'il est ruiné. On note $s_c(a)$ sa probabilité de succès (atteindre c avant la ruine).

1. Calculer $s_c(0)$ et $s_c(c)$
2. Montrer, pour $a > 0$, en raisonnant sur ce qui s'est passé au premier coup, la relation

$$s_c(a) = ps_c(a+1) + qs_c(a-1)$$

3. Etudier la suite récurrente d'ordre 2 $(s_c(a), a \geq 1)$ et déterminer la valeur de $s_c(a)$ suivant que $p = 1/2$ ou $p \neq 1/2$.
4. Application numérique : Calculer la valeur précédente avec $a = 900$; $c = 1000$; $a = 100$; $c = 20000$ dans les cas $p = 0$; 5 et $p = 18/38$.

Exercice 3.16 (Une marche aléatoire) On étudie le cours en bourse d'une action. On suppose que les variations journalières sont indépendantes les unes des autres. On convient de noter 0 le cours au début de l'observation. On suppose que chaque jour, l'action monte d'une unité (+1) avec probabilité p ou descend d'une unité (-1) avec probabilité $1-p$. On note X_{2n}, le cours constaté le $2n$-ème jour.
Par exemple si n=2, et que le cours à baisser les trois premiers jours et monté le quatrième jour, on a $X_4 = -1-1-1+1 = -2$

1) Quelles sont les valeurs prises par X_{2n} ?
2) On note Y_{2n} le nombre de jours parmi les $2n$ jours d'observation où l'action a monté ; et Z_{2n} le nombre de jours parmi les $2n$ jours, où l'action a baissé. Quelles sont les lois de probabilité de Y_{2n} et Z_{2n} ? Donner leur espérance.

3) Quelles relations lient d'une part n et $Y_{2n}Z_{2n}$, et d'autre part X_{2n}, Y_{2n} et Z_{2n} ? En déduire une expression de X_{2n}? Montrer que pour tout $k \in [| -n, n-]$

$$\mathbb{P}[X_{2n} = 2k] = \binom{2n}{n+k} p^{n+k} q^{n-k}$$

4 Couples de variables aléatoires discrètes.

Exercice 4.1 Soit X et Y deux variables aléatoires dans $\mathbb{N}^\star$, telles que

$$\mathbb{P}[\{X = i\} \cap \{Y = j\}] = \frac{a}{2^{i+j}}, \text{ pour tout } (i, i) \in \mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}^\star$$

a) Calculer a
b) Déterminer les lois marginales de X et Y.
c) X et Y sont elles indépendantes ?

Exercice 4.2 Un garagiste dispose de 2 voitures de location. Chacune est utilisable en moyenne 4 jours sur 5. Il loue les voitures avec une marge de 50 euros par jour et par voiture. On considère X la variable aléatoire égale au nombre de clients se présentant chaque jour pour louer une voiture. On suppose $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$ avec

$$\mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{10} \quad \mathbb{P}(X = 1) = \frac{3}{10} \quad \mathbb{P}(X = 2) = \frac{4}{10} \quad \mathbb{P}(X = 3) = \frac{2}{10}.$$

a) Déterminer la loi du couple de variables aléatoires (X, Y) représentant le nombre de clients X qui se présentent et le nombre de clients à qui le garage prête une voiture Y.

b) Calculer la marge moyenne par jour.

Exercice 4.3 Soit X_1, X_2, X_3 des variables de Bernoulli, deux à deux indépendantes, prenant les valeurs 0 ou 1 avec probabilité 1/2. On considère les variables

$$Y = X_1 X_2 \qquad \text{et} \qquad Z = X_2 X_3$$

1. Déterminer la loi jointe de (Y, Z).
2. En déduire les lois marginales de Y et Z.
3. Calculer $\mathrm{Cov}(Y, Z)$ Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer l'espérance et la variance de $Y + Z$ et YZ

Exercice 4.4 (Minimum de deux variables aléatoires géométriques) Dans cet exercice, p désigne un réel de $]0; 1[$ et $q = 1 - p$. On considère deux variables aléatoires X et Y, indépendantes, et suivant toutes deux la même loi géométrique de paramètre p.

1. Soit $i \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que $\mathbb{P}(X > i) = q^i$.
2. Vérifier que l'égalité précédente est encore vraie lorsque $i = 0$.
3. On définit une variable aléatoire Z en posant $Z = \min(X, Y)$, c'est-à-dire :

$$Z = \begin{cases} X & \text{si } X \leq Y \\ Y & \text{si } Y < X \end{cases}$$

4. Déterminer $\mathbb{P}(Z > i)$, pour $i \in \mathbb{N}$.
5. Soit $i \in \mathbf{N}^*$. Calculer $\mathbb{P}(Z = i)$, pour $i \in \mathbb{N}^*$.
6. Démontrer que Z suit la loi géométrique de paramètre $1 - q^2$.

Exercice 4.5 Soit N une variable aléatoire de Poisson de paramètre λ et $(X_i)_{i\geq 0}$ une suite de variables de Bernoulli de paramètre p, indépendantes entre elles et de N. Montrer que

$$S = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

est une variable de Poisson de paramètre $p\lambda$.

Exercice 4.6 On lance n fois ($n \geq 3$) une pièce de monnaie parfaitement équilibrée. Pour tout $i \in [|1, n|]$, on pose $A_i =$« on a obtenu pile au i-ème lancer ».

1) Soit X le nombre total de « piles » obtenu. Donner sa loi, son espérance et sa variance.
2) Si, à l'issue des n lancers, on obtient par exemple pile-pile-face-face-face-pile-..., on dit que l'on a une première série de longueur 2, parce qu'on a obtenu 2 piles au début (et pas plus), et une deuxième série de longueur 3, parce qu'on a obtenu ensuite 3 faces (et pas plus). Autre exemple : si l'on obtient face-face-pile-face-..., on a une première série de longueur 2 et une deuxième série de longueur 1. On note S_1 la longueur de la première série et S_2 la longueur de la deuxième série si elle existe. On convient de poser $S_2 = 0$ s'il n'y a pas de deuxième série, c'est-à-dire si $S_1 = n$. Déterminer $S_1(\Omega)$.
3) Justifier l'égalité
$$\{S_1 = 1\} = A_1 \cap A_2^c \cup A_1^c \cap A_2.$$
En déduire, en justifiant soigneusement, que $\mathbb{P}(S_1 = 1) = \dfrac{1}{2}$.
4) En étudiant l'événement $\{S_1 = k\}$ à la manière de la question précédente, démontrer que :
$$\forall k \in [|1, n-1|],\ \mathbb{P}(S_1 = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$$
5) Démontrer que $\mathbb{P}(S_1 = n) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$.
6) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\sum_{i=1}^{n} i x^{i-1} = \frac{n x^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}.$$
Calculer l'espérance de S_1.
7) Justifier l'égalité $S_2(\Omega) = [|0, n-1|]$.
8) Calculer $\mathbb{P}(S_2 = 0)$.
9) Soit $k \in [|1, n|]$. Montrer que :
$$\mathbb{P}_{\{S_1 = k\}}(S_2 = 1) = \begin{cases} 0 & \text{si } k = n \\ 1 & \text{si } k = n-1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } k \leq n-2 \end{cases}$$

10) En déduire que :

$$\mathbb{P}(S_2 = 1) = \frac{1}{2}$$

Exercice 4.7 Une entreprise de construction produit des objets sur deux chaînes de montage A et B qui fonctionnent indépendemment l'une de l'autre. Pour une chaîne donnée, les fabrications des pièces sont indépendantes. On suppose que A produit 60% des objets et B produit 40% des objets. La probabilité qu'un objet construit par la chaine A soit défectueux est 0.1 alors que la probabilité pour qu'un objet construit par la chaine B soit défectueux est 0.2.

1. On choisit au hasard un objet à la sortie de l'entreprise. On constate que cet objet est défectueux. Calculer la probabilité de l'événement "l'objet provient de la chaîne A" .
2. On suppose de plus que le nombre d'objets produits en une heure par A est une variable aléatoire Y qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 20$.

   On considère la variable aléatoire X représentant le nombre d'objets défectueux produits par la chaîne A en une heure.

   (a) Rappeler la loi de Y ainsi que la valeur de l'espérance et de la variance de Y.

   (b) Soient k et n deux entiers naturels, déterminer la probabilité conditionnelle

   $$\mathbb{P}_{(Y=n)}(X = k)$$

   (On distinguera les cas $k \leq n$ et $k > n$).

   (c) En déduire, en utilisant le système complet d'événements $\{Y = i\}_{i \in \mathbb{N}}$, que X suit une loi de Poisson de paramètre 2 .

Exercice 4.8 Une urne contient une boule blanche et une boule noire, les boules étant indiscernables au toucher. On y prélève une boule, chaque boule ayant la même probabilité d'être tirée, on note sa couleur, et on la remet dans l'urne avec c boules de la couleur de la boule tirée. On répète cette épreuve, on réalise ainsi une succession de tirages ($n \geq 2$).
On considère les variables aléatoires $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ définies par :

$X_i = 1$ si on obtient une boule blanche au i-ème tirage.
$X_i = 0$ sinon.

On définit, pour $2 \leq p \leq n$, la variable aléatoire Z_p par

$$Z_p = \sum_{i=1}^{p} X_i$$

1) Déterminer la loi du couple (X_1, X_2). En déduire la loi de X_2.
2) Déterminer la loi de Z_2
3) a) Déterminer $Z_p(\Omega)$. Soit $p \leq n - 1$
   b) Déterminer $\mathbb{P}(X_{p+1} = 1 | Z_p = k)$ pour $k \in Z_p(\Omega)$. En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que

$$\mathbb{P}[X_{p+1} = 1] = \frac{1 + c\mathbb{E}[Z_p]}{2 + pc}$$

c) Montrer par récurrence que pour tout $p \in [|1, n|]$,

$$\mathbb{P}[X_p = 1] = \mathbb{P}[X_p = 0] = \frac{1}{2}$$

Exercice 4.9 Soit une pièce avec probabilité d'avoir face p.

— On lance la pièce n fois, soit X la variable aléatoire représentant le nombre de faces obtenues, et Y le nombre de piles. Quelle est la loi de X, la loi de Y ? montrer que les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.

— On lance maintenant la pièce N fois où N est un nombre aléatoire qui suit une loi de Poisson. On note encore X et Y le nombre de faces et le nombre de piles. Déterminer la loi du couple (X, Y), en déduire que X et Y sont indépendantes, et donner leurs lois respectives.

Exercice 4.10 On considère n urnes numérotées de 1 à n. La première urne contient des boules blanches et des boules noires ; la proportion de boules blanches est p_1. Les urnes suivantes contiennent chacune a boules blanches et a boules noires.
On effectue n tirages de la manière suivante : on tire une boule de la premiere urne que l'on place dans la deuxième urne, puis on tire une boule de la deuxième urne que l'on place dans la troisième, et ainsi de suite jusqu'au tirage dans la dernière urne.

Pour $1 \leq k \leq n$, on désigne par X_j la variable aléatoire égale à 1 si la boule tirée dans la kème urne est blanche, égale à 0 si la boule tirée de la $k$ème urne est noire.

1) Déterminer les lois de probabilités de X_1 et X_2, puis leurs espérances et leurs variances en fonction de p_1 et de a.
2) Démontrer qu'il existe une valeur de p_1 pour laquelle X_1 et X_2 suivent la même loi de probabilité.
3) Pour cette valeur de p_1 étudier l'indépendance de X_1 et X_2. Pour $1 \leq k \leq n$, on pose $p_k = \mathbb{P}[X_k = 1]$ et $q_k = \mathbb{P}[X_k = 0]$.
4) Démontrer qu'il existe une matrice M dépendant de a telle que pour $k \in [|1, n-1|]$

$$\begin{pmatrix} p_{k+1} \\ q_{k+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} p_k \\ q_k \end{pmatrix}$$

5) Déterminer M^n pour $n \in \mathbb{N}$, puis déterminer la loi de X_n.
6) Déterminer $\lim_{n\to\infty} p_n$ et $\lim_{n\to\infty} q_n$.

Exercice 4.11 Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tel que : $\forall (j, k) \in \mathbb{N}^2$,

$$\mathbb{P}(\{X = j\} \cap \{Y = k\}) = \frac{(j+k)\lambda^{j+k}}{ej!k!}$$

a) Déterminer λ. (On pourra étudier $f : x \mapsto 2xe^{2x-1} - 1$) sur $\mathbb{R}_+$.
b) Déterminer les lois de X et de Y. Les variables X et Y sont elles indépendantes ?

Exercice 4.12 Soit X et Y deux variables indépendantes vérifiant :

$$\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(Y = n) = \frac{1}{4}\left(\frac{1 + a^n}{n!}\right)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Déterminer a.
2) Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{V}(X)$
3) Déterminer la loi de $S = X + Y$.

Exercice 4.13 On dispose d'un dé équilibré à 6 faces et d'une pièce truquée telle que la probabilité d'apparition de pile soit égale à p. Soit N un entier naturel non nul. On effectue N lancers du dé ; si n est le nombre de 6 obtenus, on lance alors n fois la pièce.
On définit trois variables aléatoires X, Y, Z de la manière suivante :

Z indique le nombre de 6 tirés parmi les N lancers de dé.

X indique le nombre de piles obtenus parmi les lancers de la pièce.

Y indique le nombre de faces obtenues au lancers de la pièce.

1) Préciser la loi de Z, son espérance, sa variance.
2) Pour $k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$, déterminer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}[X = k|Z = n]$.
3) Montrer que pour tout couple d'entiers naturels (k, n) :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = k \text{ et } Z = n) &= \binom{n}{k}\binom{N}{n}p^k(1-p)^{n-k}\left(\frac{5}{6}\right)^{N-n}\left(\frac{1}{6}\right)^{n} \text{ si } 0 \leq k \leq n \leq N \\ &= 0 \text{ sinon.}\end{aligned}$$

4) Calculer la probabilité $\mathbb{P}(X = 0)$.
5) Montrer que pour tout couple d'entiers naturels (k, n) tels que $0 \leq k \leq n \leq N$

$$\binom{n}{k}\binom{N}{n} = \binom{N}{k}\binom{N-k}{n-k}.$$

En déduire la probabilité $\mathbb{P}(X = k)$.

6) Montrer que la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètre $(N, \frac{p}{6})$. Quelle est la loi de Y ?
7) Calculer la covariance de (X, Y). les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
8) Déterminer la loi du couple (X, Y).

Exercice 4.14 Soit X une variable aléatoire uniforme sur $[|1, n|]$ et Y une variable aléatoire uniforme sur $[|1, X|]$, déterminer la loi de Y et calculer $\mathbb{E}[Y]$.

Exercice 4.15 Soit n un entier naturel non nul, et X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes les deux des lois uniformes sur $\{1, ..., n\}$.

1. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$ et $\mathbb{P}(X \geq Y)$.
2. Déterminer la loi de $D = Y - X$.

Problème 1 : permutations aléatoires

On considère l'espace probabilisé $(\mathfrak{S}_n, \mathcal{P}(\mathfrak{S}_n), \mathbb{P})$ où $\mathfrak{S}_n$ désigne l'ensemble des permutations de $[|1, n|]$ et $\mathbb{P}$ est la probabilité uniforme sur $\mathfrak{S}_n$. Pour tout $\omega \in \mathfrak{S}_n$,

$$\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{\mathrm{Card}(\mathfrak{S}_n)} = \frac{1}{n!}.$$

On appelle *dérangement* de $[|1, n|]$, toute permutation de $[|1, n|]$ sans point fixe. Pour tout $\omega \in \mathfrak{S}_n$, on définit $N(\omega)$ comme le nombre de points fixes de ω. La variable aléatoire N est à valeurs dans $[|0, n|]$.

1) Pour tout $i \in [|1, n|]$, on pose $A_i = \{\omega \in \mathfrak{S}_n; \omega(i) = i\}$. Déterminer $\mathbb{P}(A_i)$ pour tout $i \in [|1, n|]$.
2) Exprimer l'événement $\{N \geq 1\}$ à l'aide des A_i.
3) Soit $J \subset [|1, n|]$ tel que $\mathrm{Card}(J) = k$. Justifier que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \frac{(n-k)!}{n!}$.
4) En déduire une expression de $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)$. (On utilisera la formule de Poincaré).

6) Montrer que $\mathbb{P}(N = 0) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$. En déduire le nombre de dérangements de $[|1, n|]$. On le notera D_n.

5) On cherche maintenant à exprimer complètement la loi de N. Que vaut $\mathbb{P}(N = n)$? Soit $k \in [|0, n|]$ et $J \subset [|1, n|]$ tel que $\mathrm{Card}J = k$. Soit $B_J = \{\omega \in \mathfrak{S}_n; \omega(j) = j \text{ ssi } j \in J\}$. Justifier que $\mathrm{Card}B_J = D_{n-k}$. Exprimer l'événement $\{N = k\}$ à l'aide des B_J où J parcourt les sous-ensembles de $[|1, n|]$ à k éléments.

6) Montrer que $\mathbb{P}(N = k) = \frac{D_{n-k}}{(n-k)!k!}$.

7) On s'intéresse au comportement asymptotique de la variable aléatoire N lorsque n tend vers l'infini. On note donc N_n le nombre aléatoire de points fixes d'une permutation uniforme dans $\mathfrak{S}_n$. A l'aide d'un théorème sur les séries alternées, montrer que $(N_n, n \geq 1)$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre 1, c'est-à-dire

$$\mathbb{P}(N_n = k) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \frac{e^{-1}}{k!}.$$

8) Exprimer N à l'aide des variables aléatoires $(\mathbb{1}_{A_i}, i \in [|1, n|])$. Calculer $\mathbb{E}(N)$.

9) Soit $i \neq j$ éléments de $[|1, n|]$. Calculer $\mathbb{P}(A_i \cap A_j)$. Les événements A_i et A_j sont-ils indépendants ? Montrer que $\mathrm{Cov}(\mathbb{1}_{A_i}, \mathbb{1}_{A_j}) = \frac{1}{n^2(n-1)}$. Déterminer $\mathrm{Var}(N)$.

Problème 2 : Loi hypergéométrique

1) Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\{0, ..., m\}$. Rappeler la définition de $\mathbb{E}[Y]$. Soit $x \in \{0, ..., m\}$, on note $\mathbb{E}_{\{X=x\}}[Y]$ l'espérance de Y par rapport

à la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{\{X=x\}}$: c'est-à-dire

$$\mathbb{E}_{\{X=x\}}(Y) = \sum_{y=0}^{m} y\mathbb{P}_{\{X=x\}}(Y = y), \text{ montrer que } \mathbb{E}[Y] = \sum_{x=0}^{m} \mathbb{E}_{\{X=x\}}[Y]\mathbb{P}(X = x).$$

On fait passer un examen sous forme d'un QCM (questions à choix multiples). L'examen se compose de 20 questions tirées au hasard et *sans remise* parmi 100 questions possibles recouvrant le programme. A chaque question est proposée 4 réponses possibles, *seule une réponse est correcte.* Si le candidat choisit la bonne réponse il a un point, sinon 0 point.

On considère un candidat ayant appris une proportion p du programme ($100p \in \mathbb{N}$).

2) On note X le nombre de questions figurant parmi les 20 que le candidat a révisées. Justifier brièvement que X suit une loi hypergéométrique de paramètres $(100, 20, p)$.

$$\mathbb{P}[X = x] = \frac{\binom{100p}{x}\binom{100(1-p)}{20-x}}{\binom{100}{20}}.$$

Rappeler la signification du coefficient binomial $\binom{n}{k}$ (on ne demande pas sa formule). Justifier la formule donnée ci-dessus.

On suppose dans la suite que $X(\Omega) = \{0, ..., 20\}$. Les X questions rapportent X points au candidat.

3) Etant donnée une question non révisée, le candidat choisit uniformément au hasard une réponse parmi les 4 possibles. Quelle est la probabilité que le candidat choisisse la bonne réponse ?

4) Le nombre de questions non révisées par le candidat est $20 - X$. On les numérote par $\{1, 2, ..., 20-X\}$. A toute question $i \in \{1, 2, ..., 20-X\}$, on associe une variable aléatoire X_i suivant une loi de Bernoulli de paramètre $1/4$: $X_i = 1$ si le candidat répond bien à la question i, $X_i = 0$ sinon. Les variables $(X_i, i \geq 1)$ sont indépendantes.

On note Y la somme des points obtenus en répondant aux questions **non révisées**.

a) Exprimer Y en fonction des X_i et de X.

b) Soit $x \in \{0, ..., 20\}$, sachant $X = x$, justifier que Y suit une loi binomiale de paramètre $(20-x, 1/4)$. Déterminer la loi jointe de (X, Y), c'est-à-dire calculer $\mathbb{P}(X = x, Y = y)$ pour tous $x \in [|0, 20|]$, $y \in [|0, 20 - x|]$.

c) Que vaut $\mathbb{E}_{\{X=x\}}[Y]$? A l'aide de la question 1), montrer que $\mathbb{E}[Y] = 5 - 5p$. *Indication : On rappelle que* $\mathbb{E}[X] = 20p$

d) On rappelle $\mathrm{Var}(X) = \frac{80}{99}20p(1 - p)$. Déterminer $\mathrm{cov}(X, Y)$. Commenter le signe de $\mathrm{cov}(X, Y)$.

e) Déterminer $\mathrm{Var}(Y)$ et à l'aide des questions précédentes, donner une formule explicite du coefficient de corrélation de X et Y.

5) On note N la note du candidat. Exprimer N en fonction de X et Y et déterminer l'espérance de N en fonction de p. Pour quelle valeur de p a-t-on $\mathbb{E}[N] = 10$? On détermine maintenant la loi de $N = X + Y$. Montrer que pour tout $n \in [|0, 20|]$

$$\mathbb{P}(N = n) = \sum_{x=0}^{n} \frac{\binom{100p}{x}\binom{100(1-p)}{20-x}}{\binom{100}{20}} \binom{20-x}{n-x} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-x} \left(\frac{3}{4}\right)^{20-n}.$$

6) On suppose maintenant que l'on enlève 1/3 de point à chaque mauvaise réponse et on note M la note obtenue. Sans chercher la loi explicite de la note, mais en introduisant à la place des X_i, la variable aléatoire Y_i prenant comme valeur $-1/3$ avec probabilité $3/4$ et 1 avec probabilité $1/4$ calculer $\mathbb{E}[M]$.

Problème 8 : Marche aléatoire symétrique

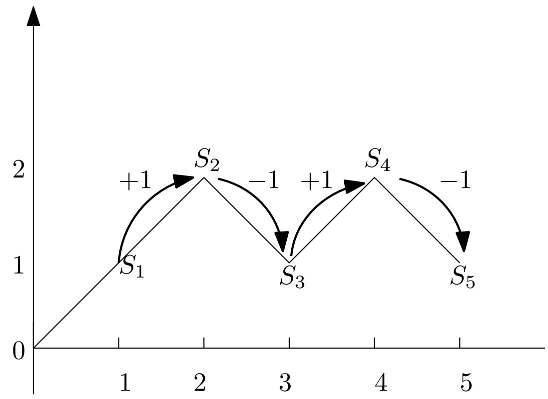
Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sur lequel est définie une suite $(X_n, n \in \mathbb{N}^\star)$ de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées. La loi de X_1 est donnée par

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}.$$

On définit

$$S_0 = 0 \text{ et } S_n = \textstyle\sum_{k=1}^{n} X_k.$$

La suite de variables aléatoires $(S_n, n \geq 1)$ est appelée *marche aléatoire symétrique.*



Plusieurs questions naturelles se posent, la marche aléatoire, retourne-t-elle à l'origine ? Si oui, combien de temps met-on en moyenne pour y revenir ?

L'objectif du problème est de répondre à ces deux questions. On définit

$$T = \begin{cases} \min\{n \geq 1; S_n = 0\} \text{ si } \{n \geq 1; S_n = 0\} \neq \emptyset \\ \\ +\infty \text{ sinon.} \end{cases}$$

La variable aléatoire T est le premier temps de retour à 0 de la marche aléatoire.

Le problème contient trois parties. La troisième partie est purement analytique. N'hésitez pas à admettre des questions d'analyse pour avancer.

Etude du temps de retour à l'origine :

1) On considère les événement E_n=« la marche aléatoire n'a pas touché 0 entre les temps 1 et n » et A_k=« La marche aléatoire visite 0 pour la dernière fois avant l'instant n, à l'instant k ». Ecrire E_n et A_k à l'aide des variables aléatoires T et $S_k, ..., S_n$
2) Montrer que
$$\mathbb{P}(A_k) = \mathbb{P}(S_k = 0)\mathbb{P}_{\{S_k=0\}}\left(\bigcap_{i=k+1}^{n}\{S_i \neq 0\}\right).$$
3) Pour tout k entier fixé, on définit $(S_n^{(k)}, n \geq 0) = (S_{n+k}, k \geq 0)$ pour tout $n \geq 0$. En remarquant que $(S_n^{(k)}, n \geq 0)$ sachant $S_0^{(k)} = 0$ a même loi que $(S_n, n \geq 0)$, montrer que
$$\mathbb{P}(A_k) = \mathbb{P}(S_k = 0)\mathbb{P}\left(E_{n-k}\right).$$
4) Montrer que
$$\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(S_k = 0)\mathbb{P}\left(E_{n-k}\right) = 1.$$
5) Soit $x \in [0, 1[$. On considère les suites $(a_n, n \geq 0)$ et $(b_n, n \geq 0)$ définies par
$$a_n = \mathbb{P}[S_n = 0]x^n \text{ et } b_n = \mathbb{P}[E_n]x^n.$$
Justifier que les séries de terme général $(a_n, n \geq 0)$ et $(b_n, n \geq 0)$ sont convergentes. En utilisant le produit de Cauchy (voir l'encadré à la fin du sujet) montrer que
$$\frac{1}{1-x} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(S_n = 0)x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}(E_n)x^n\right).$$
6) Justifier que $\mathbb{P}(S_{2n+1} = 0) = 0$ pour tout n. On définit une suite de variables aléatoires indépendantes $(Y_i, i \geq 1)$ de la façon suivante : $Y_i = 1$ si $X_i = 1$ et 0 sinon. Justifier l'identité des événements
$$\{S_{2n} = 0\} = \left\{\sum_{i=1}^{2n} Y_i = n\right\}.$$
Montrer que
$$\mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}.$$
7) En admettant [2]
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\binom{2n}{n}}{4^n}x^{2n} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$
montrer que
$$\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}(E_n)x^n = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$
8) En remarquant que $\{T = +\infty\} \subset E_n$ pour tout n. Montrer que $\mathbb{P}(T = +\infty) = 0$. Qu'en déduisez vous pour la marche aléatoire, avec quelle probabilité retourne-t-elle à l'origine ?

2. On le démontre dans la dernière partie du sujet

Etude de l'espérance du temps de retour à l'origine :

9) Montrer que

$$\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(T > n) = \infty.$$

On rappelle que si $\sum_{n\geq 1} a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence R alors

$$\lim_{x\to R^-} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n R^n \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}.$$

10) Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}[T = k] = \mathbb{P}[T > k-1] - \mathbb{P}[T > k].$$

En utilisant cette relation, établir que pour tout entier naturel $n \geq 2$,

$$\sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}[T = k] = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}[T > k] - n\mathbb{P}[T > n].$$

11) On suppose que $\mathbb{E}[T] < +\infty$. Montrer que

$$n\mathbb{P}[T > n] = n \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{P}[T = k] \text{ et } n \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{P}[T = k] \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} k\mathbb{P}[T = k].$$

En déduire que $n\mathbb{P}[T > n]$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, et que

$$\mathbb{E}[T] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}[T > k].$$

12) Montrer que $\mathbb{E}[T] = +\infty$. La moyenne du temps de retour à l'origine est donc infinie [3].

Développement en série entière de $\phi : x \to \frac{1}{\sqrt{1-x}}$.

La fonction $\phi : x \to \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ est de classe C^∞ sur $[0,1[$. On rappelle la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n au point $x \in [0,1[$:

$$\phi(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\phi^{(k)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\phi^{(n+1)}(t)dt.$$

13) On note $\phi^{(n)}$ la dérivée n-ième de ϕ, montrer par récurrence que

$$\phi^{(n)}(x) = \frac{(2n)!}{4^n n!}(1-x)^{-\frac{2n+1}{2}}.$$

3. Cette propriété est remarquable : on a montré que le temps de retour à 0 est fini avec probabilité 1, mais la moyenne de ce temps est infinie. Cela se comprend en considérant les événements où la marche aléatoire s'éloigne beaucoup de 0. Sur ces événements, qui ont une probabilité strictement positive, la marche aléatoire prend beaucoup de temps pour revenir en 0.

14) Soit $t \in [0, x]$, démontrer que

$$\frac{(x-t)^n}{n!}\phi^{(n+1)}(t) = (n+1)\frac{\binom{2n+2}{n+1}}{4^{n+1}}\left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \times \frac{1}{(1-t)^{3/2}}$$

15) On a[4] l'inégalité suivante : $\frac{\binom{2n+2}{n+1}}{4^{n+1}} \leq 1$. En étudiant la fonction $t \mapsto x - \frac{x-t}{1-t}$, montrer que pour tout $t \in [0, x]$, $0 \leq \frac{x-t}{1-t} \leq x$. Montrer à partir de ces inégalités que

$$0 \leq \frac{(x-t)^n}{n!}\phi^{(n+1)}(t) \leq \frac{(n+1)x^n}{(1-x)^{3/2}},$$

en déduire

$$\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\phi^{(n+1)}(t)dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

16) Etablir l'égalité préalablement admise

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} x^{2n}.$$

Rappel sur le produit de Cauchy :

si $(a_n, n \geq 1)$ et $(b_n, n \geq 1)$ sont deux suites positives et forment les termes généraux de séries convergentes, alors la série de terme général

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

converge et sa somme vaut

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right).$$

4. $\frac{\binom{2n+2}{n+1}}{4^{n+1}} = \mathbb{P}[S_{2n+2} = 0] \leq 1$