Sorbonne Université & Université Sorbonne Paris Nord Année 2022/2023
Clément Foucart

Examen: Processus de branchement en temps et espace continus.

Tous documents autorisés. Sujet recto-verso.

Exercice 1 : CSBP conditionné à tendre vers l'infini. On considère un CSBP **surcritique** $X := (X_t, t \geq 0)$ de mécanisme Ψ. On suppose pour simplifier que le CSBP a une moyenne finie, qu'il n'admet pas de partie diffusive ($\sigma = 0$), et que $\rho := \inf\{x > 0 : \Psi(x) > 0\} \in]0, \infty[$. On rappelle que dans ce cas Ψ prend la forme suivante :

$$\Psi(\lambda) = \gamma\lambda + \int_0^\infty (e^{-\lambda x} - 1 + \lambda x)\pi(\mathrm{d}x), \forall \lambda \geq 0,$$

où $\gamma = \Psi'(0+) \in] - \infty, 0[$ et $\int_0^\infty x \wedge x^2 \pi(\mathrm{d}x) < \infty$. On note le semi-groupe de X, $(P_t)_{t\geq 0}$. Pour tout $\lambda \geq 0$, on définit $e_\lambda(x) := e^{-\lambda x}$ pour tout $x \in [0, \infty[$. On rappelle que $(P_t)_{t\geq 0}$ satisfait quelque soit $t \geq 0$,

$$P_t e_\lambda(x) := \mathbb{E}_x[e^{-\lambda X_t}] = e^{-x u_t(\lambda)} \text{ avec } \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_t(\lambda) = -\Psi\big(u_t(\lambda)\big) \text{ et } u_0(\lambda) = \lambda.$$

On rappelle que l'on a la dichotomie suivante : $\mathbb{P}_x$-presque sûrement, $X_t \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ ou $X_t \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

1. Soit $h(x) := 1 - e^{-x\rho}$ pour tout $x \geq 0$. Montrer que h est une fonction invariante du semi-groupe $(P_t)_{t\geq 0}$, c'est-à-dire que pour tout $t \geq 0$, $P_t h(x) = h(x)$ pour tout $x \geq 0$. En déduire que $(h(X_t), t \geq 0)$ est une martingale et retrouver l'égalité vue en cours
$$\mathbb{P}_x(X_t \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \infty) = h(x).$$
2. Pour toute fonction borélienne f positive ou bornée définie sur $]0, \infty[$, on définit pour $x > 0$,
$$P_t^\infty f(x) := \mathbb{E}_x \left[\frac{h(X_t)}{h(x)} f(X_t) \right].$$
Vérifier que $P_t^\infty 1 = 1$ pour tout $t \geq 0$, puis montrer la propriété de semi-groupe : pour tous $s, t \geq 0$, $x > 0$,
$$P_{t+s}^\infty f(x) = P_t^\infty (P_s^\infty f)(x).$$
3. On note $\mathbb{P}^\infty$ la loi du processus conditionné à tendre vers l'infini, autrement dit $\mathbb{P}^\infty(\cdot) := \mathbb{P}(\cdot \,|X_t \underset{t\to\infty}{\to} \infty)$. Le processus sous $\mathbb{P}^\infty$ est Markovien, montrer qu'il a pour semi-groupe $(P_t^\infty)_{t\geq 0}$, c'est-à-dire $\mathbb{E}_x^\infty[f(X_t)] = P_t^\infty f(x)$ quelque soit f bornée ou positive.
4. On note maintenant le processus de loi $\mathbb{P}^\infty$, X^∞. Soit $P_t^\infty(x, \mathrm{d}z)$ sa loi au temps t lorsqu'il est issu de $x > 0$. Montrer que $P_t^\infty(x, \mathrm{d}z)$ converge étroitement lorsque x tend vers 0 vers une loi $\eta_t(\mathrm{d}z)$ portée sur $]0, \infty[$. Exprimer la transformée de Laplace de η_t à l'aide de la fonction $\lambda \mapsto u_t(\lambda)$.

Vous n'avez besoin que des résultats des questions 2 et 3 pour les questions suivantes.

5. Soit $\mathcal{D} := \mathrm{vect}\{e_\lambda, \lambda > 0\}$. Montrer que X^∞ est solution du problème martingale $(\mathcal{L}^\infty, \mathcal{D})$ avec $\mathcal{L}^\infty f := \frac{\mathcal{L}hf}{h}$ où $\mathcal{L}$ est le générateur du CSBP, $f \in \mathcal{D}$ et pour rappel $h = 1 - e_\rho$. On pourra admettre et utiliser le fait que le semi-groupe $(P_t^\infty)_{t\geq 0}$ satisfait la propriété de Feller.

6. Montrer que $\mathcal{L}^\infty f = \mathcal{L}f + \mathcal{A}f$, avec $\mathcal{A}f := \frac{(\mathcal{L}f)e_\rho - \mathcal{L}(fe_\rho)}{1-e_\rho}$, retrouver l'identité suivante $\mathcal{L}e_\lambda(x) = xe_\lambda(x)\Psi(\lambda)$, valable pour tous $\lambda, x \geq 0$, puis établir que pour tout $x > 0$
$$\mathcal{A}e_\lambda(x) = xe_\lambda(x)\frac{e_\rho(x)}{1-e_\rho(x)}\big(\Psi(\lambda) - \Psi(\lambda+\rho)\big).$$
7. Soit $\Phi(\lambda) := \Psi(\lambda+\rho) - \Psi(\lambda)$ pour tout $\lambda > 0$. A l'aide de l'identité suivante
$$\Psi(\lambda+\rho) = \Psi'(\rho)\lambda + \int_0^\infty (e^{-\lambda h} - 1 + \lambda h)e^{-\rho h}\pi(\mathrm{d}h),$$
montrer que Φ est une fonction de Bernstein sans terme de dérive ni de meurtre et avec mesure de Lévy $\nu(\mathrm{d}h) := (1-e^{-\rho h})\pi(\mathrm{d}h)$. En déduire que quelque soit $f \in \mathcal{D}$ et $x > 0$
$$\mathcal{L}^\infty f(x) = \mathcal{L}f(x) + \frac{xe_\rho(x)}{1-e_\rho(x)}\int_0^\infty (f(x+h) - f(x))\,\nu(\mathrm{d}h).$$

Exercice 2 : Processus des temps d'extinction. On considère un flot de CSBPs càdlàgs $(X_t(x), t \geq 0, x \geq 0)$ de mécanisme Ψ. On a donc pour tout $t \geq 0, (X_t(x), x \geq 0)$ subordinateur (au sens faible) d'exposant de Laplace $\lambda \mapsto u_t(\lambda)$ et pour tous $x, y \geq 0$, $(X_t(x+y) - X_t(x), t \geq 0)$ CSBP càdlàg de mécanisme Ψ indépendant de $(X_t(x), t \geq 0)$. On note $\mathbb{P}$ la loi du flot et on pose
$$T_x := \inf\{t \geq 0 : X_t(x) = 0\}.$$
On suppose Ψ **critique ou sous-critique** ($\Psi'(0+) \geq 0$).

1. Démontrer que $\mathbb{P}(T_x \leq t) = e^{-xu_t(\infty)}$ où $u_t(\infty) := \lim_{\lambda\to\infty} \uparrow u_t(\lambda)$. Soit $t > 0$. Justifier que $u_t(\infty) < \infty$ si et seulement si $\int^\infty \frac{\mathrm{d}u}{\Psi(u)} < \infty$ (condition de Grey). Dans ce cas que vaut $\mathbb{P}(T_x < \infty)$?

On suppose dorénavant $\int^\infty \frac{\mathrm{d}u}{\Psi(u)} < \infty$.

2. Justifier l'identité $\mathbb{E}(T_x) = \int_0^\infty \mathbb{P}(T_x > t)\mathrm{d}t$ et en déduire l'expression
$$\mathbb{E}(T_x) = \int_0^\infty (1 - e^{-xz})\frac{\mathrm{d}z}{\Psi(z)}.$$
Montrer que $\mathbb{E}(T_x) < \infty$ ssi $\int_0 \frac{z}{\Psi(z)}\mathrm{d}z < \infty$. Que dire dans le cas sous-critique ?
3. Montrer que $T_{x+y} = \max(T_x, T_{x,x+y})$ presque sûrement, pour une certaine variable aléatoire $T_{x,x+y}$ indépendante de T_x et de même loi que T_y.
4. Justifier à l'aide de la question précédente que $(T_x, x \geq 0)$ est un processus de Markov homogène en temps et montrer que son semi-groupe $(Q_y)_{y\geq 0}$ satisfait pour toute fonction f borélienne bornée ou positive et tous $y, t \geq 0$
$$Q_y f(t) := \mathbb{E}_t[f(T_y)] = f(t)e^{-yu_t(\infty)} + y\int_t^\infty f(r)\Psi(u_r(\infty))e^{-yu_r(\infty)}\mathrm{d}r.$$
Justifier l'existence d'une version càdlàg du processus.
5. <u>On suppose Ψ à variation infinie</u>. On rappelle la construction Poissonienne du flot de CSBPs : pour tout $x \geq 0$, $X_0(x) = x$ et quelque soit $t > 0$,
$$X_t(x) = \textstyle\sum_{x_i \leq x} X^i_t,$$
avec $\mathcal{N} = \sum_{i\in I}\delta_{(x_i, X^i)}$ une mesure aléatoire de Poisson sur $[0,\infty) \times \mathcal{D}$ d'intensité $\lambda \otimes \mathbb{N}^\Psi$ où $\mathcal{D}$ est l'espace des fonctions càdlàgs, λ est la mesure de Lebesgue et $\mathbb{N}^\Psi$ la mesure d'amas. Exprimer le processus $(T_x, x \geq 0)$ à l'aide de $\mathcal{N}$. On pourra introduire la fonction $T(X) := \inf\{t > 0 : X_t = 0\}$ sur $\mathcal{D}$. On note le saut au point x : $\Delta T_x := T_x - T_{x-}$. Que représente l'ensemble aléatoire $\mathcal{R} := \{x > 0 : \Delta T_x > 0\}$ en termes du modèle de population ? Retrouver la fonction de répartition de T_x à l'aide d'un calcul Poissonnien.
6. (bonus) A partir du résultat de la question 4, déterminer la forme du générateur de $(T_x)_{x\geq 0}$ et donner un sous-espace de son domaine.