Exercice 1 :

1) Soit $\rho$ le + grand zéro $>0$ de $\psi$. On a $u_t(\rho)=\rho$ $\forall t\geq 0$ donc

$$\mathbb{E}_x\left[1-e^{-\rho X_t}\right] = 1-e^{-x u_t(\rho)} = 1-e^{-x\rho} = h(x)$$

$\| \quad P_t h(x)$.

Soient $t>s\geq 0$, $\mathbb{E}[h(X_t) \mid \mathcal{F}_s] \overset{\text{prop. de Markov}}{=} P_{t-s} h(X_s)$

$= h(X_s)$.

donc $(h(X_t))_{t\geq 0}$ est une martingale positive.

$(h(X_t))_{t\geq 0}$ admet donc une limite p.s, d'après le rappel $X_t \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases}$ p.s

On a donc $h(X_t) = 1-e^{-\rho X_t} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{1}_{\{X_t\to\infty\}}$ p.s

et $\mathbb{P}_x(X_t\to\infty) = h(x)$

2) $$P_t^\infty(P_s^\infty f) = \frac{P_t(h P_s^\infty f)}{h} = \frac{P_t(P_s h f)}{h} \overset{\text{prop de s.G de }(P_t)}{=} \frac{P_{t+s} h f}{h}$$

$$= P_{t+s}^\infty f.$$

3) $\mathbb{P}^\infty(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot \mid X_t \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \infty)$.

$$\mathbb{E}_x^\infty[f(X_t)] = \frac{\mathbb{E}_x\left[f(X_t)\mathbb{1}_{\{X_s \underset{s\to\infty}{\longrightarrow}\infty\}}\right]}{\mathbb{P}_x(X_s \underset{s\to\infty}{\longrightarrow}\infty)} = \frac{1}{h(x)}\mathbb{E}_x\left[f(X_t)\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{X_s\to\infty\}} \mid \mathcal{F}_t\right]\right]$$

Markov

$$= \frac{1}{h(x)}\mathbb{E}_x\Big(f(X_t)\underbrace{\mathbb{P}_{X_t}(X_s\to\infty)}_{=h(X_t)}\Big)$$

$$= P_t^\infty f(x)$$

4) $$\int e^{-\lambda z} P_t^\infty(x,dz) = \mathbb{E}_x^\infty\left[e^{-\lambda X_t}\right]$$

$$= \frac{1}{h(x)}\mathbb{E}_x\left[h(X_t)e^{-\lambda X_t}\right] = \frac{1}{h(x)}\left[e^{-x u_t(\lambda)} - e^{-x u_t(\lambda+\rho)}\right]$$

$$\underset{x\to 0}{\sim} \frac{x\left(u_t(\lambda+\rho)-u_t(\lambda)\right)}{\rho x}$$

$$\underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{u_t(\lambda+\rho)-u_t(\lambda)}{\rho}$$

Par le th. de cv de Lévy.

$P_t^\infty(x,dz) \underset{x\to 0}{\Rightarrow} \eta_t(dz)$ avec $\int e^{-\lambda z}\eta_t(dz)$

$$= \frac{u_t(\lambda+\rho)-u_t(\lambda)}{\rho}.$$

5) Soit $\mathcal{D} = \mathrm{Vect}\{e_\lambda,\ \lambda > 0\}$. On sait d'après l'indication (ou en appliquant Stone-Weierstrass...) que $(P_t^\infty)$ est un semi-groupe de Feller.

Par un théorème (voir la feuille de rappels sur les Feller), le générateur s'obtient comme la limite simple, en général,

$$\mathcal{L}^\infty f = \lim_{t \to 0^+} \frac{P_t^\infty f - f}{t},$$

on a donc

$$\frac{P_t^\infty f - f}{t} = \frac{\frac{P_t hf}{h} - f}{t} = \frac{1}{h}\,\frac{P_t hf - hf}{t} \xrightarrow[t \to 0]{} \frac{1}{h}\mathcal{L} hf$$

car $hf \in \mathcal{D} \subset \mathcal{D}_\mathcal{L}$.

On a donc $\mathcal{L}^\infty f = \frac{1}{h}\mathcal{L} hf$, où $\mathcal{L}$ est le générateur du CSBP.

NB: $h = 1 - e_\rho$

6)

$$\mathcal{L}^\infty f = \frac{1}{1-e_\rho}\mathcal{L}(1-e_\rho)f = \frac{1}{1-e_\rho}\left(\mathcal{L}f - \mathcal{L}e_\rho f\right)$$

$$= \mathcal{L}f + \left(\frac{1}{1-e_\rho} - 1\right)\mathcal{L}f - \frac{1}{1-e_\rho}\mathcal{L}fe_\rho$$

$$= \mathcal{L}f + \underbrace{\frac{e_\rho \mathcal{L}f - \mathcal{L}fe_\rho}{1-e_\rho}}_{\mathcal{A}f}$$

D'après le cours, $$\mathcal{L}f(x) = -\gamma x f'(x) + x\int_0^\infty \left(f(x+h) - f(x) - hf'(x)\right)\pi(dh).$$

(ici $|\psi'(0+)| < \infty$ et on a vu que le gén. se met sous cette forme)

Donc :

$$\mathcal{L}e_\lambda(x) = +\gamma x \lambda e_\lambda(x) + x e_\lambda(x)\int_0^\infty \left(e^{-\lambda h} - 1 + h\lambda\right)\pi(dh)$$

$$= x e_\lambda(x)\psi(\lambda).$$

$$\mathcal{A}e_\lambda(x) = \frac{1}{1-e_\rho(x)}\left[e_\rho \mathcal{L}e_\lambda(x) - \mathcal{L}e_{\lambda+\rho}(x)\right]$$

$$= \frac{1}{1-e_\rho(x)}\, x\left[e_{\rho+\lambda}(x)\psi(\lambda) - e_{\lambda+\rho}(x)\psi(\lambda+\rho)\right] = \frac{x e_\lambda(x)}{1-e_\rho(x)}\, e_\rho(x)\left(\psi(\lambda) - \psi(\lambda+\rho)\right)$$

7)

$$\phi(\lambda) = \psi(\lambda+\rho) - \psi(\lambda) = \psi'(\rho)\lambda + \int_0^\infty \left(e^{-\lambda h} - 1 + \lambda h\right)e^{-\rho h}\pi(dh) - \gamma\lambda - \int_0^\infty \left(e^{-\lambda h} - 1 + \lambda h\right)\pi(dh)$$

$$\left[\psi'(\rho) = \gamma + \int_0^\infty \left(1 - e^{-\rho h}\right)h\,\pi(dh)\right]$$

$$= \left(\psi'(\rho) - \gamma\right)\lambda + \int_0^\infty \left(e^{-\lambda h} - 1 + \lambda h\right)\left(e^{-\rho h} - 1\right)\pi(dh).$$

$$= \int_0^\infty \left(1 - e^{-\lambda h}\right)\left(1 - e^{-\rho h}\right)\pi(dh).$$

De plus $\nu(dh) := (1-e^{-\rho h})\,\pi(dh)$ vérifie $\int^{\infty} (1\wedge h)\,\nu(dh) < \infty$.

<u>Conclusion</u> : $\phi$ est une fonction de Bernstein. Par linéarité : $\forall f \in \mathcal{D}$

$$\mathcal{L}^{\infty} f(x) = \mathcal{L} f(x) + \mathcal{A} f(x) \quad \text{avec} \quad \mathcal{A} f(x) \overset{(*)}{=} \frac{x\, e_\rho(x)}{1 - e_\rho(x)} \int_0^{\infty} \left(f(x+h) - f(x)\right) \nu(dh)$$

(*) précisions :

$$\mathcal{A} e_\lambda(x) = - \frac{x\, e_\lambda(x)}{1 - e_\rho(x)}\, e_\rho(x)\, \phi(\lambda)$$

$$= \frac{x\, e_\rho(x)}{1 - e_\rho(x)} \left(- e_\lambda(x)\, \phi(\lambda)\right)$$

$$= \frac{x\, e_\rho(x)}{1 - e_\rho(x)} \int_0^{\infty} \left(e_\lambda(x+h) - e_\lambda(x)\right) \nu(dh)$$

<u>Exercice 2</u>

1). Cours : $\mathbb{P}(T_x < \infty) = \lim_{t\to\infty} \mathbb{P}(T_x \leq t) = \lim_{t\to\infty} e^{-x\, u_t(\infty)} = 1$ car $u_t(\infty) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$.

2) $$\int_0^{\infty} \mathbb{P}(T_x > t)\, dt = \int_0^{\infty} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{T_x > t\}}\right] dt \overset{F.T}{=} \mathbb{E}\Big[\underbrace{\int_0^{\infty} \mathbb{1}_{\{T_x > t\}}\, dt}_{= T_x}\Big] = \mathbb{E}(T_x).$$

donc $$\mathbb{E}(T_x) = \int_0^{\infty} \left(1 - e^{-x\, u_t(\infty)}\right) dt = \int_0^{\infty} \left(1 - e^{-xz}\right) \frac{dz}{\Psi(z)}$$ $z = u_t(\infty)$, $dz = -\Psi(z)\, dt$

Dans le cas souscritique $\Psi'(0+) > 0$ et $\Psi(z) \underset{z\to 0}{\sim} z\, \Psi'(0+)$ donc

$$\int_0^1 \underbrace{(1 - e^{-xz})}_{\underset{z\to 0}{\sim} xz} \frac{dz}{\Psi(z)} < \infty. \quad \text{et} \quad \frac{z}{\Psi(z)} \xrightarrow[z\to 0]{} 1/\Psi'(0+) < \infty$$

Par hyp. $\int_1^{\infty} \frac{dz}{\Psi(z)} < \infty$, on a donc $\mathbb{E}(T_x) < \infty$ dans le cas souscritique

3) $$T_{x+y} = \inf\{t \geq 0 : X_t(x+y) = 0\}.$$

$$= \inf\{t \geq 0 : \underbrace{X_t(x+y) - X_t(x)}_{\geq 0} + \underbrace{X_t(x)}_{\geq 0} = 0\}.$$

$\perp\!\!\!\perp$

$X_t(x+y) - X_t(x) + X_t(x) = 0 \iff X_t(x+y) - X_t(x) = 0$ et $X_t(x) = 0$

donc $T_{x+y} = \max(T_{x,x+y}, T_x)$ où $T_{x,x+y} = \inf\{t > 0,\ X_t(x+y) - X_t(x) = 0\}$

de plus $T_{x,x+y} \overset{\text{loi}}{=} T_y$.

4) Le processus $(T_x)_{x \geq 0}$ est Markovien car sachant $\sigma\{T_u, u \leq x\}$, la loi de $T_{x+y}$ ne dépend que de $T_x$ (et pas des variables aléatoires $T_u$, $u < x$). L'homogénéité vient du fait que la loi ne dépend pas de $x$ et $x+y$ mais uniquement de $y$ (car $T_{x,x+y} \overset{loi}{=} T_y$)

Soit $(Q_y)$ le semigroupe :

$$
\begin{aligned}
Q_y f(t) &= \mathbb{E}_t[f(T_y)] \\
&= \mathbb{E}[f(\max(t, T_y))] \\
&= f(t)\, \mathbb{P}(t > T_y) + \mathbb{E}[f(T_y) \mathbb{1}_{\{t \leq T_y\}}] \\
&= f(t)\, e^{-y u_t(\infty)} + \int_t^\infty f(r)\, \mathbb{P}(T_y \in dr) \\
&= f(t)\, e^{-y u_t(\infty)} + \int_t^\infty f(r) \underbrace{\frac{d}{dr} \mathbb{P}(T_y \leq r)} dr.
\end{aligned}
$$

$$
= -y \frac{d}{dr} u_r(\infty) e^{-y u_r(\infty)}
$$

$$
= y \psi(u_r(\infty)) e^{-y u_r(\infty)}
$$

$$
= f(t)\, e^{-y u_t(\infty)} + \int_t^\infty f(r)\, y\, \psi(u_r(\infty))\, e^{-y u_r(\infty)}\, dr.
$$

Soit $f \in \mathcal{C}_0$, c.à.d $f(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$ alors.

$Q_y f(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$ (l'intégrale tend vers 0 dès qu'elle converge) et $u_t(\infty) \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$ donc $f(t) e^{-y u_t(\infty)} \underset{t \to \infty}{\sim} f(t)$.

$Q_y f(t) \xrightarrow[y \to 0]{} f(t)$ clairement.

Le semigroupe est donc Feller et par un théorème général, $(T_x)_{x \geq 0}$ admet une version càdlàg.

5) $\mathcal{N} = \sum_{i \in I} \delta_{(t_i, x^i)}$, $X_t(x) = \sum_{x_i \leq x} X_t^i$ $\forall t > 0$.

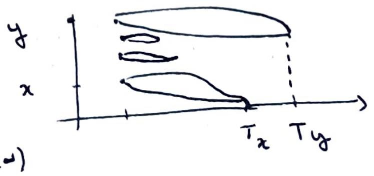
PPP $(dx \otimes N^\psi)$ $\mathcal{M} := \mathcal{N} \circ T^{-1} := \sum_{i \in I} \delta_{(x_i, T(x^i))}$ est un PPP d'intensité $dx \otimes N^\psi(T(x) \in dt)$ sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$

$\forall t > 0$ :

$$
N^\psi(T(x) > t) = N_\psi(X_t > 0) \overset{(cours)}{=} \int_0^\infty \ell_t(dx) = u_t(\infty)
$$

on a $T_x = \sup_{x_i \leq x} T(x^i)$ $\forall x \geq 0$ p.s

$\mathcal{R} = \{x > 0 : \Delta T_x > 0\}$ est l'ensemble des sauts du processus $(T_x)_{x \geq 0}$, cela correspond aux records de longévité dans la population :




$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(T_x \leq t) &= \mathbb{P}(\mathcal{M}([0,x] \times ]t, \infty[) = \emptyset) \\
&= e^{-x N^\psi(T(x) > t)} = e^{-x u_t(\infty)}.
\end{aligned}
$$