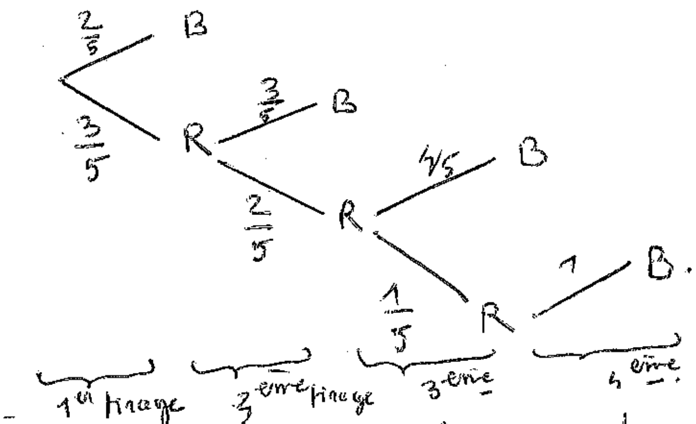
Problème 2 : probabilité CAPES BLANC (2016)

Soient $b, r \in \mathbb{N}^*$. Il y a b boules blanches, r boules rouges. On tire au hasard une boule, si elle est blanche on la remet, si elle est rouge on ne la remet pas et remet une boule blanche. Le nombre de boules reste constant et est noté $N = b + r$.

Partie A

On suppose $b = 2$ et $r = 3$

I) 1) Arbre pondéré :



2) Soit X la v.a égale au nombre de tirages effectués

a) $X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}$

b) $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{2}{5}$, $\mathbb{P}(X=2) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$

$$\mathbb{P}(X=3) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{24}{125}$$

$$\mathbb{P}(X=4) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{6}{125}$$

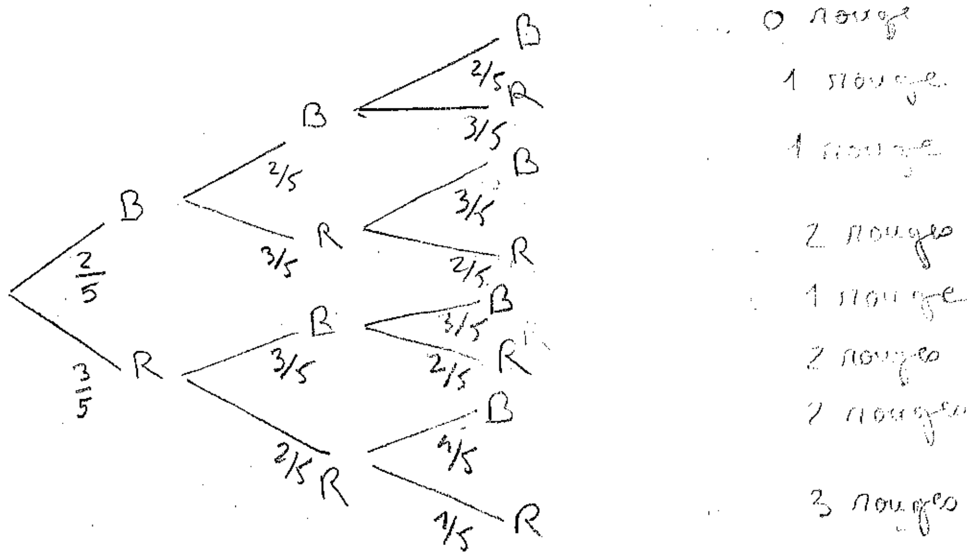
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{4} k\,\mathbb{P}(X=k) = 1 \times \frac{2}{5} + 2 \times \frac{9}{25} + 3 \times \frac{24}{125} + 4 \times \frac{6}{125}$$

$$\simeq 1,89$$

Interprétation : La moyenne théorique du nombre de tirages nécessaires pour avoir une boule blanche est 1,89. Si on réalise l'expérience un grand nombre de fois, d'après la loi des grands nombres la moyenne empirique du nombre de tirages nécessaires converge vers 1,89.

II)

1)



2)

a) $Y(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$

b) $\mathbb{P}(Y=0) = \frac{8}{125}$, $\mathbb{P}(Y=1) = \frac{57}{125}$

$\mathbb{P}(Y=2) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{54}{125}$

$\mathbb{P}(Y=3) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{6}{125}$.

$\mathbb{E}(Y) = 1 \times \frac{57}{125} + 2 \times \frac{4}{125} + 3 \times \frac{6}{125}$

$= \frac{183}{125} = 1,46$

Interprétation : La moyenne théorique du nombre de boules rouges obtenues est $\mathbb{E}(Y) = 1,46$.

III) 1) L'algorithme simule un tirage dans l'expérience 1. Si $d > b$ alors on a tiré une boule rouge, sinon une boule blanche. Le résultat donne la couleur de la boule obtenue.

2) Il faut rajouter une variable x pour compter le nombre de tirages : Si $(d \geq b)$ Alors Sinon Fin retourner (x).

on initialise : $x \leftarrow 1$.

$x \leftarrow x + 1$
$b \leftarrow b + 1$
$r \leftarrow r - 1$

Partie B

I) A_n = « la $n^{\text{ème}}$ boule tirée est rouge ».

Soit X le nombre de tirages effectués.

1) $X(\Omega) = [\![1, \dots, n+1]\!]$. En effet, puisque $b \geq 1$ on peut tirer une boule blanche dès le premier tirage. Il y a au départ n boules rouges et au « pire des cas », nous les tirerons avant d'obtenir une boule blanche. donc la première boule blanche, dans ce cas sera obtenue au $(n+1)^{\text{ème}}$ tirage.

2) Si $k \in [\![1, n]\!]$ alors $(X = k) = A_1 \cap \dots \cap A_{k-1} \cap A_k^c$

Si $k = n+1$ alors $(X = k) = (X = n+1) = A_1 \cap \dots \cap A_n$

3) a) $$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$ (définie si $\mathbb{P}(B) > 0$)

b) Soit $i \geq 1$ et $B_1, \dots, B_i$ des évènements tels que $\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{i-1}) > 0$

Soit $j \in [\![2, i-1]\!]$, $B_1 \cap \dots \cap B_{j-1} \supseteq B_1 \cap \dots \cap B_{i-1}$

donc $\mathbb{P}(B_1 \cap \dots \cap B_{j-1}) \geq \mathbb{P}(B_1 \cap \dots \cap B_{i-1}) > 0$ et $\mathbb{P}(B_j \mid B_1 \cap \dots \cap B_{j-1})$ est bien définie.

on a : $$\mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(B_2 \mid B_1) \cdots \mathbb{P}(B_i \mid B_1 \cap \dots \cap B_{i-1})$$
$$= \cancel{\mathbb{P}(B_1)} \frac{\cancel{\mathbb{P}(B_2 \cap B_1)}}{\cancel{\mathbb{P}(B_1)}} \times \frac{\mathbb{P}(B_3 \cap B_2 \cap B_1)}{\cancel{\mathbb{P}(B_2 \cap B_1)}} \cdots \times \frac{\mathbb{P}(B_i \cap \dots \cap B_1)}{\cancel{\mathbb{P}(B_{i-1} \cap \dots \cap B_1)}}$$
$$= \mathbb{P}(B_1 \cap \dots \cap B_i).$$

1) a) $\mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cdots \cap A_{k-1} \cap A_k^c)$

$= \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(A_2|A_1) \cdots \mathbb{P}(A_{k-1} | A_1 \cap \cdots \cap A_{k-2})\; \mathbb{P}(A_k^c | A_1 \cap \cdots \cap A$

$\mathbb{P}(A_j | A_1 \cap \cdots \cap A_{j-1})$ est la probabilité d'avoir une boule rouge au $j^{\text{ème}}$ tirage sachant qu'on a tiré $j-1$ boules rouges précéd^t

donc juste avant le $j^{\text{ème}}$ tirage, il y a $r-(j-1)$ boules rouges et $\mathbb{P}(A_j | A_1 \cap \cdots \cap A_{j-1}) = \dfrac{r-(j-1)}{b+r} = \dfrac{r-(j-1)}{N}$.

$$\mathbb{P}(A_k^c | A_1 \cap \cdots \cap A_{k-1}) = \frac{b+k-1}{b+r} = \frac{N-(r-k+1)}{N}$$

on a donc $\mathbb{P}(X=k) = \dfrac{r}{N}\,\dfrac{r-1}{N} \times \cdots \times \dfrac{r-(k-2)}{N}\,\dfrac{N-(r-k+1)}{N}$

$$= \frac{r(r-1)(r-2)\times\cdots\times(r-(k-2))\; N-(r-k+1)}{N^k}$$

$$= \frac{\prod_{j=0}^{k-2}(r-j)}{N^{k-1}}\;\frac{N-(r-k+1)}{N} \quad \text{pour } k \leq r$$

$\mathbb{P}(X=r+1) = \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(A_2|A_1) \cdots \mathbb{P}(A_r | A_1 \cap \cdots \cap A_{r-1})$

$$= \frac{r}{N}\,\frac{r-1}{N} \cdots \frac{r-(r-1)}{N} = \frac{r!}{N^r}$$

b) on a montré $\mathbb{P}(X=r+1) = \dfrac{r!}{N^r}$.

$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{r(r-1)\times\cdots\times(r-(k-2))}{N^{k-1}} - \frac{r(r-1)\times\cdots\times(r-(k-2))\times(r-(k-1))}{N^k}$$

On : $$\frac{n!}{(n-(k-1))!} = \frac{1\times 2\times\cdots\times(n-k)\times(n-(k-1))\,(n-(k-2))\times\cdots\times n}{\cancel{(n-(k-1))!}}$$

$$= \prod_{j=0}^{k-2}(n-j).$$

on a donc bien la formule de l'énoncé.

5) a) $$\sum_{k=1}^{m} k\left(p_{k-1}-p_k\right) = \sum_{k=1}^{m}(k-1)\,p_{k-1} + \sum_{k=1}^{m}p_{k-1} - \sum_{k=1}^{m}k\,p_k$$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{m-1}k\,p_k}_{\text{changement d'indice dans la 1ère somme}} - \sum_{k=1}^{m}k\,p_k + \sum_{k=1}^{m}p_{k-1}$$

$$= -m\,p_m + \sum_{k=0}^{m-1}p_{k-1}$$

b) $$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n+1}k\,\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{n}k\left(\frac{n!}{(n-(k-1))!\,N^{k-1}} - \frac{n!}{(n-k)!\,N^k}\right) + (n+1)\frac{n!}{N^n}$$

$$\mathbb{E}(X) \overset{\text{par 5-a)}}{=} \sum_{k=0}^{n-1}\frac{n!}{(n-k)!\,N^k} - \underbrace{n\frac{n!}{N^n} + (n+1)\frac{n!}{N^n}}_{\frac{n!}{N^n}}$$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!}\,\frac{1}{N^k}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{k!}{N^k}.}$$

II) Soit $m \geq 1$. Soit Y_m le nombre de boules rouges obtenues à l'issue du m-ième tirage. On pose $Y_0 = 0$.

1) a) $\mathbb{P}(Y = k) = 0$ si $k > m$ car on ne peut pas tirer plus de boules rouges que de boules au total.

b) $\mathbb{P}(Y_m = k) = 0$ si $k > r$ car on ne peut pas tirer plus de boules rouges qu'il n'y en a au départ.

c) $\mathbb{P}(Y_m = 0) = \mathbb{P}($ lors des n tirages on a obtenu que des boules blanches$)$

$= \left(\frac{N-r}{N}\right)^m$ car il y a remise des boules blanches.

2) Soit $k \in [\![0, m]\!]$ et $i \in [\![0, m-1]\!]$

$$\mathbb{P}(Y_m = k \mid Y_{m-1} = i) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \notin \{i, i+1\} \\ \frac{r-i}{N} & \text{si } k = i+1 \\ 1 - \frac{r-i}{N} & \text{si } k = i \end{cases}$$

Soit $k \in [\![1, m]\!]$, $\{Y_m = k\} = \underbrace{\{Y_m = k\} \cap \{Y_{m-1} = k\} \cup \{Y_m = k\} \cap \{Y_{m-1} = k-1\}}_{\text{Ev}^{\text{ts}} \text{ disjoints}}$

donc $\mathbb{P}(Y_m = k) = \mathbb{P}(Y_m = k \mid Y_{m-1} = k)\,\mathbb{P}(Y_{m-1} = k) + \mathbb{P}(Y_m = k \mid Y_{m-1} = k-1)\,\mathbb{P}(Y_{m-1} = k-1)$

(Formule des probabilités totales).

On a donc $\mathbb{P}(Y_m = k) = \left(1 - \frac{r-k}{N}\right)\mathbb{P}(Y_{m-1} = k) + \frac{r-(k-1)}{N}\,\mathbb{P}(Y_{m-1} = k-1)$.

$$\mathbb{P}(Y_m = k) = \frac{b+k}{N}\,\mathbb{P}(Y_{m-1} = k) + \frac{r+1-k}{N}\,\mathbb{P}(Y_{m-1} = k-1),$$

3) $$\mathbb{E}(Y_n) = \sum_{k=0}^{n} k\, \mathbb{P}(Y_n = k) = \sum_{k=0}^{n} \left(k \,\frac{b+k}{N}\, \mathbb{P}(Y_{n-1} = k) + k\, \frac{r+1-k}{N}\, \mathbb{P}(Y_{n-1} = k-1) \right)$$

$$" \quad = \sum_{k=1}^{n} \frac{k(b+k)}{N}\, \mathbb{P}(Y_{n-1} = k) + \sum_{k=1}^{n} k\, \frac{r+1-k}{N}\, \mathbb{P}(Y_{n-1} = k-1)$$

$$" \quad = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k(b+k)}{N}\, \mathbb{P}(Y_{n-1} = k) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(k+1)(r-k)}{N}\, \mathbb{P}(Y_{n-1} = k)$$

(car $\mathbb{P}(Y_{n-1} = n) = 0$) (par changement d'indice)

$$" \quad = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(N-r)k + (k+1)\,r - k}{N}\, \mathbb{P}(Y_{n-1} = k)$$

$$" \quad = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k(N-r+r-1) + r}{N}\, \mathbb{P}(Y_{n-1} = k)$$

$$" \quad = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k(N-1) + r}{N}\, \mathbb{P}(Y_{n-1} = k)$$

$$" \quad = \frac{N-1}{N}\, \mathbb{E}(Y_{n-1}) + \frac{r}{N} \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(Y_{n-1} = k)}_{=1}$$

4) a) $$\begin{cases} \mathbb{E}(Y_n) = \left(1 - \frac{1}{N}\right) \mathbb{E}(Y_{n-1}) + \frac{r}{N} & (*) \\ \mathbb{E}(Y_0) = 0 & (\text{car } Y_0 = 0 \text{ par convention de l'énoncé}) \end{cases}$$

Il s'agit d'une suite arithmético-géométrique.

L'initialisation est claire. Supposons que $\mathbb{E}(Y_{n-1}) = r\left(1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-1}\right)$

pour $n \geq 1$ fixé, alors par $(*)$: $$\mathbb{E}(Y_n) = \left(1 - \frac{1}{N}\right) r \left(1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-1}\right) + \frac{r}{N}$$

$$= r\left(1 - \frac{1}{N} - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n}\right) + \frac{r}{N} = r\left(1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n}\right)$$

La propriété est initialisée et héréditaire, donc elle est vraie pour tout $n \geq 0$.

b) N étant un entier fixé, $1-\frac{1}{N}<1$ et $\left(1-\frac{1}{N}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

On a donc $\mathbb{E}(Y_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} r$.

L'existence d'un entier n_0 à partir duquel $|\mathbb{E}(Y_n)-r| \leq \frac{1}{4}$ se déduit de la convergence de la suite $(\mathbb{E}(Y_n))_{n\geq 1}$ vers r. (On peut également chercher à expliciter n_0 à partir de la formule

$$\mathbb{E}(Y_n) = r\left(1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^n\right) : \qquad |\mathbb{E}(Y_n)-r| = r\left(1-\frac{1}{N}\right)^n \leq \frac{1}{4}$$

$$\iff n\ln\left(1-\frac{1}{N}\right) \leq \ln\frac{1}{4} - \ln r.$$

$$\iff n \geq \frac{-\ln(4r)}{\ln\left(1-\frac{1}{N}\right)} = \frac{\ln(4r)}{\ln\left(\frac{N}{N-1}\right)} \Bigg)$$

donc $n_0 = \left[\dfrac{\ln(4r)}{\ln\left(\frac{N}{N-1}\right)}\right]+1$. convient.

III. 1) $A_k =$ « la $k^{\text{ième}}$ boule tirée est rouge »

$$\mathbb{P}(A_{k+1}) = \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(A_{k+1} \mid Y_k = i)\, \mathbb{P}(Y_k = i)$$

par la formule des probas totales, en effet $\Omega = \bigcup_{i=0}^{k} \{Y_k = i\}$

$$\mathbb{P}(A_{k+1} \mid Y_k = i) = \mathbb{P}(Y_{k+1} = i+1 \mid Y_k = i) = \frac{r-i}{N}$$

2) $$\mathbb{P}(A_{k+1}) = \sum_{i=0}^{k} \frac{r-i}{N}\,\mathbb{P}(Y_k = i) = \frac{r}{N} - \frac{\mathbb{E}(Y_k)}{N}$$

$$= \frac{r}{N} - \frac{1}{N} r\left(1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^k\right)$$

$$= \frac{r}{N}\left(1 - 1 + \left(1-\frac{1}{N}\right)^k\right)$$

$$= \frac{r}{N}\left(1-\frac{1}{N}\right)^k.$$

IV. 1) $$\mathbb{E}[Y_n(Y_n-1)] = \sum_{k=1}^{n} k(k-1)\,\mathbb{P}(Y_n=k)$$ par la formule de transfert.

$$\mathbb{P}(Y_n=k) = \frac{N-r+k}{N}\,\mathbb{P}(Y_{n-1}=k) + \frac{r+1-k}{N}\,\mathbb{P}(Y_{n-1}=k-1)$$

donc $$\mathbb{E}(Y_n(Y_n-1)) = \sum_{k=1}^{n-1} k(k-1)\,\frac{(N-r+k)\,\mathbb{P}(Y_{n-1}=k)+(r+1-k)\,\mathbb{P}(Y_{n-1}=k-1)}{N}$$

d'une part : $$\sum_{k=1}^{n-1} k(k-1)\,\mathbb{P}(Y_{n-1}=k-1)\,\frac{r+1-k}{N} = \sum_{j=1}^{n-1}(j+1)j\,\mathbb{P}(Y_{n-1}=j)\,\frac{r-j}{N}$$

d'autre part : $$\sum_{k=1}^{n} k(k-1)\,\frac{N-r+k}{N}\,\mathbb{P}(Y_{n-1}=k) = \sum_{k=1}^{n-1} k(k-1)\,\frac{N-r+k}{N}\,\mathbb{P}(Y_{n-1}=k)$$

car $\mathbb{P}(Y_{n-1}=n)=0$

on a donc : $$\mathbb{E}(Y_n(Y_n-1)) = \sum_{k=1}^{n-1}\left(k(k+1)\,\frac{r-k}{N} + k(k-1)\,\frac{N-r+k}{N}\right)\mathbb{P}(Y_{n-1}=k).$$

De plus $$\begin{aligned} & k(k+1)(r-k) + k(k-1)(N-r+k) \\ &= k(k-1)(N-2) + (2-r+k)\,k(k-1) + k(k+1)(r-k) \\ &= k(k-1)(N-2) + k\big(2(k-1) - r(k-1) + k(k-1) + r(k+1) - k(k+1)\big) \\ &= k(k-1)(N-2) + k\big(2\cancel{k} - 2 - \cancel{rk} + r + \cancel{k^2} - \cancel{k} + \cancel{rk} + r - \cancel{k^2} - \cancel{k}\big) \\ &= k(k-1)(N-2) + 2k(r-1). \end{aligned}$$

Finalement $$\boxed{\mathbb{E}(Y_n(Y_n-1)) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k(k-1)(N-2) + 2(r-1)k}{N}\,\mathbb{P}(Y_{n-1}=k)}$$

2) Par la formule de transfert, on voit de la formule précédente, la relation

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_n(Y_n-1)) &= \frac{N-2}{N}\,\mathbb{E}(Y_{n-1}(Y_{n-1}-1)) + \frac{2(r-1)}{N}\,\mathbb{E}(Y_{n-1}). \\ &= \left(1-\frac{2}{N}\right)\mathbb{E}(Y_{n-1}(Y_{n-1}-1)) + \frac{2r(r-1)}{N}\left(1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-1}\right). \end{aligned}$$

par II.4.a

3) Par récurrence :

$n=0$ est clair, car $Y_0 = 0$

On suppose la relation vraie au rang $n-1$:

$$\mathbb{E}[Y_{n-1}(Y_{n-1}-1)] = r(r-1)\left(1+\left(1-\frac{2}{N}\right)^{n-1} - 2\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-1}\right)$$

$$\mathbb{E}(Y_n(Y_n-1)) = \left(1-\frac{2}{N}\right) r(r-1)\left[1+\left(1-\frac{2}{N}\right)^{n-1} - 2\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-1}\right]$$

$$+ \frac{2r(r-1)}{N}\left(1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-1}\right)$$

$$= r(r-1)\left(1 - \cancel{\frac{2}{N}} + \left(1-\frac{2}{N}\right)^{n} - 2\left(1-\frac{2}{N}\right)\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-1} + \cancel{\frac{2}{N}} - \frac{2}{N}\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-1}\right)$$

$$= r(r-1)\left(1 + \left(1-\frac{2}{N}\right)^{n} - \underbrace{\left(2\left(1-\frac{2}{N}\right)+\frac{2}{N}\right)}_{=2\left(1-\frac{1}{N}\right)}\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-1}\right)$$

$$= r(r-1)\left(1+\left(1-\frac{2}{N}\right)^{n} - 2\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n}\right)$$

La propriété est héréditaire et initialisée, par principe de récurrence elle est vraie pour tout $n \geq 0$.

4) $V(Y_n) = \mathbb{E}(Y_n^2) - \mathbb{E}(Y_n)^2 = \mathbb{E}(Y_n(Y_n-1)) + \mathbb{E}(Y_n) - \mathbb{E}(Y_n)^2$ par linéarité de l'espérance.

5)
$$V(Y_n) = r(r-1)\left(1+\left(1-\frac{2}{N}\right)^{n} - 2\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n}\right) + r\left(1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n}\right) - r^2\left(1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n}\right)^2$$

$$= r(r-1)\left(1-\frac{2}{N}\right)^{n} + r(r-1) - 2r(r-1)\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n} + r - r\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n} - r^2\left(1-2\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n} + \left(1-\frac{1}{N}\right)^{2n}\right)$$

$$= r(r-1)\left(1-\frac{2}{N}\right)^{n} + \cancel{r^2} - \cancel{r} + \left(-2\cancel{r^2} + 2r - r + 2\cancel{r^2}\right)\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n} + \cancel{r} - \cancel{r^2} - r^2\left(1-\frac{1}{N}\right)^{2n}$$

$$= r(r-1)\left(1-\frac{2}{N}\right)^{n} + r\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n} - r^2\left(1-\frac{1}{N}\right)^{2n}.$$

V. 1) $\left(1-\frac{2}{N}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\left(1-\frac{1}{N}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car $1-\frac{2}{N} < 1$
et $1-\frac{1}{N} < 1$.

on a donc $V(Y_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

2) L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne

$$0 \leq \mathbb{P}\left(|Y_n - \mathbb{E}(Y_n)| \geq \alpha \right) \leq \frac{V(Y_n)}{\alpha^2}.$$

par encadrement, on a $\mathbb{P}(|Y_n - \mathbb{E}(Y_n)| \geq \alpha) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

3) Par la seconde inégalité triangulaire

$$|Y_n - \mathbb{E}(Y_n)| \geq \big|\, |Y_n - r| - |r - \mathbb{E}(Y_n)| \,\big| \geq |Y_n - r| - |r - \mathbb{E}(Y_n)|$$

donc $\mathbb{P}\left(|Y_n - r| - |r-\mathbb{E}(Y_n)| \geq \alpha \right) \leq \mathbb{P}\left(|Y_n - \mathbb{E}(Y_n)| \geq \alpha \right)$

et par encadrement $\mathbb{P}\left(|Y_n - r| - |r-\mathbb{E}(Y_n)| \geq \alpha \right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

4) par la question II.4.b, si $n \geq n_0$ alors $\left|\mathbb{E}(Y_n) - r\right| \leq \frac{1}{4}$

Les valeurs prises par Y_n sont $[\![0, r]\!]$. on cherche à montrer

$\mathbb{P}\left(|r - Y_n| - |r - \mathbb{E}(Y_n)| \geq \frac{1}{2} \right) = \mathbb{P}(Y_n \neq r)$. pour $n \geq n_0$.

Si $r \neq Y_n$ alors $Y_n \leq r-1$ et $|r - Y_n| - \underbrace{|r-\mathbb{E}(Y_n)|}_{\leq \frac{1}{4}} \geq 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

donc $(Y_n \neq r) \subseteq \left(|r - Y_n| - |r - \mathbb{E}(Y_n)| \geq \frac{3}{4} \right) \subseteq \left(|r - Y_n| - |r - \mathbb{E}(Y_n)| \geq \frac{1}{2} \right)$

Si $r = Y_n$ alors $|r - Y_n| - |r - \mathbb{E}(Y_n)| = -\underbrace{|r - \mathbb{E}(Y_n)|}_{\geq 0} < \frac{1}{2}$.

donc $(Y_n = r) \subseteq \left(|r - Y_n| - |r - \mathbb{E}(Y_n)| < \frac{1}{2} \right)$ et par passage

au complémentaire : $(Y_n \neq r) \supseteq \left\{ |r - Y_n| - |r - \mathbb{E}(Y_n)| \geq \frac{1}{2} \right\}$

on conclut par double inclusion que

$$(Y_n \neq r) = \left(|Y_n - r| - |r - \mathbb{E}(Y_n)| \geqslant \alpha \right).$$

et donc $\mathbb{P}(Y_n \neq r) = \mathbb{P}\left(|Y_n - r| - |r - \mathbb{E}(Y_n)| \geqslant \frac{1}{2} \right)$

5) on a donc $\mathbb{P}(Y_n \neq r) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ et $\mathbb{P}(Y_n = r) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$.

(on se gardera de parler de convergence presque sûre ici. Si vous souhaitez commenter, dites simplement que la probabilité de tirer toutes les boules rouges tend vers 1 lorsque le nombre de tirages tend vers l'∞).