Correction du DM 3

Exercice 1 Autour de l'uniforme continuité.

Soit une fonction f uniformément continue définie sur $\mathbb{R}$. Nous allons montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ tels que : pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$|f(x)| \leq a|x| + b.$$

1) Définition d'une fonction uniformément continue :
$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0\,;\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |x - y| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon.$$
Prenons $\epsilon = 1$, par définition, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, |x - y| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq 1$$

2) Soit $x = \delta$, $y = 0$, on a par la deuxième inégalité triangulaire :

$$||f(\delta)| - |f(0)|| \leq |f(\delta) - f(0)| \leq 1,$$

donc $|f(\delta)| \leq 1 + |f(0)|$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soient $x = n\delta$ et $y = (n-1)\delta$; $|x - y| = \delta$, donc $|f(n\delta) - f((n-1)\delta))| \leq 1$.

4) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f(n\delta)| \leq n + |f(0)|$. Pour $n = 0$, c'est trivial. Pour $n = 1$ c'est la question 2. Supposons que c'est vrai au rang $n - 1$ avec $n \in \mathbb{N}^\star$, on a donc $|f((n-1)\delta)| \leq n - 1 + |f(0)|$.
Hérédité : Par la première inégalité triangulaire :

$$|f(n\delta)| \leq |f(n\delta) - f((n-1)\delta)| + |f((n-1)\delta)| \leq 1 + n - 1 + |f(0)| = n + |f(0)|.$$

Par récurrence, la propriété est vraie pour tout n.

5) Soit $x \in \mathbb{R}$, soit $n = E[\frac{x}{\delta}]$, par définition de la partie entière : $n \leq \frac{x}{\delta} < n + 1$, multipliant de chaque côté par δ, on obtient $x \in [n\delta, (n+1)\delta[$.
Soit $y = n\delta$, par ce qui précède $|x - y| \leq \delta$, donc $|f(x) - f(y)| = |f(x) - f(n\delta)| \leq 1$. Par la deuxième inégalité triangulaire $|f(x)| \leq 1 + |f(n\delta)|$ puis par la question 4) : $|f(x)| \leq 1 + n + |f(0)|$.

6) Soit $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq 1 + n + |f(0)|$ et $n \leq \frac{1}{\delta}|x|$. Les réels $a = \frac{1}{\delta}$ et $b = 1 + |f(0)|$ conviennent.

7) Les fonctions polynômiales de degré supérieur ou égale à 2 ne sont pas bornées par des fonctions affines. Elles ne sont donc pas uniformément continues.

8) Soit $g(x) = \sin\left(\frac{\pi x^2}{2}\right)$. En tant que composées de fonctions continues, g est continue, de plus la fonction sinus est bornée donc g est bornée. Soit $n \in \mathbb{N}$, $\sin(\frac{\pi}{2}(4n+1)) = \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ et $\sin(2n\pi) = 0$, donc $g(\sqrt{4n+1}) - g(\sqrt{4n}) = 1$.

9) "g n'est pas uniformément continue" se traduit par :

$$\exists \epsilon > 0, \forall \delta > 0\ \exists x, y ; |x-y| \leq \delta \text{ et } |g(x) - g(y)| > \epsilon.$$

Montrons que g n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$ à l'aide de la question 8. On a $\sqrt{4n+1} - \sqrt{4n} = \frac{1}{\sqrt{4n+1}+\sqrt{4n}}$, donc la quantité $\sqrt{4n+1} - \sqrt{4n}$ est arbitrairement petite. Soit $\epsilon = 1/2$. Pour tout $\delta > 0$, il existe n tel que $\sqrt{4n+1} - \sqrt{4n} \leq \delta$, et $g(\sqrt{4n+1}) - g(\sqrt{4n}) = 1 > \epsilon = \frac{1}{2}$.

Exercice 2 Fonctions continues et périodiques.

Soit f une fonction continue. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des périodes de f i.e

$$\mathcal{P} := \{a \in \mathbb{R} | \forall x \in \mathbb{R}, f(x+a) = f(x)\}$$

Supposons que 1 et $\sqrt{3}$ sont des périodes de f.

1) Soit $E = \{n + p\sqrt{3} ; n \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{Z}\}$, montrons que $E \subset \mathcal{P}$. Soit $e \in E$, e est de la forme $n + p\sqrt{3}$. Soit $x \in \mathbb{R}$ quelconque,

$$\begin{aligned} f(x+e) &= f(x+n+p\sqrt{3}) \\ &= f(x+n-1+p\sqrt{3}) \text{ car 1 est période de } f \\ &= f(x+p\sqrt{3}) \text{ en itérant n fois le raisonnement précédent} \\ &= f(x+(p-1)\sqrt{3}) \text{ car } \sqrt{3} \text{ est période de } f \\ &= f(x) \text{ en itérant p fois le raisonnement précédent} \end{aligned}$$

donc e est une période de f et finalement $E \subset \mathcal{P}$. On vérifie immédiatement que pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et $e \in E$, $ke \in E$.

2) Soit $u = \sqrt{3} - 1$, montrons que $u^n \in E$, pour tout $n \geq 0$. Nous allons raisonner par récurrence.

- Initialisation $u^0 = 1$
- Hérédité : Soit $n \geq 0$, on suppose $u^n \in E$. Il existe donc des entiers p_n et q_n tels que $u^n = p_n + q_n\sqrt{3}$ On a $u^{n+1} = u \times u^n = u(p_n + q_n\sqrt{3}) = (\sqrt{3}-1)(p_n + q_n\sqrt{3}) = \sqrt{3}[p_n - q_n] + 3q_n - p_n$. Posant $p_{n+1} = 3q_n - p_n$ et $q_{n+1} = p_n - q_n$, on a bien $u^{n+1} \in E$.
- La propriété "$u^n \in E$" est initialisée et héréditaire, elle est donc vraie pour tout n.

Remarque : on peut écrire sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$$

3) Soit $x \in \mathbb{R}$, soit $n \in \mathbb{N}$, $x_n = E[\frac{x}{u^n}]u^n$. Le réel $E[\frac{x}{u^n}]$ est un entier, on a montré $u^n \in E$, utilisant la question 1, on a bien $x_n \in E$. D'après l'inégalité de la partie entière :

$E[\frac{x}{u^n}] \leq \frac{x}{u^n} < E[\frac{x}{u^n}] + 1$ d'où $E[\frac{x}{u^n}]u^n \leq x < E[\frac{x}{u^n}] + u^n$ et $x_n \leq x \leq x_n + u^n$.

On obtient $0 \leq x - x_n \leq u^n$. De plus $u = \sqrt{3} - 1 < 1$ donc $u^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Par encadrement, on a bien $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$. Par le critère séquentiel de la densité, E est dense dans $\mathbb{R}$.

4) L'ensemble $\mathcal{P}$ est dense dans $\mathbb{R}$ car il contient E (la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est à valeurs dans $\mathcal{P}$).
5) Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(0)$. Soit $x \in \mathbb{R}$, la suite (x_n) définie comme ci-dessus converge vers x. D'une part par continuité de f, $f(x_n) \longrightarrow f(x)$, d'autre part, pour tout n, $f(x_n) = f(0)$ car x_n est une période de f. Finalement $f(x) = f(0)$ pour tout x.
6) On déduit immédiatement de la question 5, que la fonction f (continue et périodique de périodes 1 et $\sqrt{3}$) est constante.

Exercice 3 Calculs et suites d'intégrales.

1) L'image par l'application continue g de l'intervalle fermé borné $[0,1]$ est un intervalle fermé borné (Théorème du cours). En particulier, g est bornée sur $[0,1]$.
L'application $x \to e^{-nx}g(x)$ est définie et continue sur $[0,1]$. Elle est donc intégrable sur $[0,1]$.
2) a) $I_0 = \int_0^1 xe^{-x}dx$
Par intégration par partie, on obtient
$I_0 = [x \times (-e^{-x})]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 1 \times (-e^{-x})dx = -e^{-1} + 0 + \int_0^1 e^{-x}dx = -e^{-1} + [(-e^{-x})]_0^1$
$I_0 = 1 - 2e^{-1}$.

b) $I_0 = \int_0^1 \frac{\arctan(x)}{1+x^2}dx = \int_0^1 f(x)f'(x)dx$ où $f : x \to \arctan(x)$
$I_0 = [\frac{f(x)^2}{2}]_0^1 = [\frac{\arctan(x)^2}{2}]_0^1 = (\frac{\pi}{4})^2 \times \frac{1}{2} - 0$
$I_0 = \frac{\pi^2}{32}$.

c) $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$
Avec le changement de variables $x = 2\sin^2(u)$, on a $dx = 4\cos(u)\sin(u)du$
$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{4\cos(u)\sin(u)}{\sqrt{4\sin^2(u)-4\sin^4(u)}}du = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{4\cos(u)\sin(u)}{2|\sin(u)|\sqrt{1-\sin^2(u)}}du = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{2\cos(u)}{\sqrt{1-\sin^2(u)}}du = \int_0^{\frac{\pi}{3}} 2du$
$I_0 = \frac{2\pi}{3}$.

3) Soit $n \geq 1$.
On a $|I_n| \leq \int_0^1 |e^{-nx}g(x)|dx$ (Inégalité triangulaire)
D'où $|I_n| \leq M\int_0^1 e^{-nx}dx$ (car $|g(x)| \leq M$).
Ainsi $|I_n| \leq M\frac{1-e^{-n}}{n} \leq \frac{M}{n}$
Or $\frac{M}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par encadrement, on en déduit

$$I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

4) Soit $J_n = n\int_0^1 e^{-nx}f(x)dx$. Par intégration par partie, on obtient

$$J_n = n\left[\frac{e^{-nx}}{-n}f(x)\right]_0^1 - n\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{-n}f'(x)dx,$$

donc $J_n = -e^{-n}f(1) + 1 + \int_0^1 e^{-nx}f'(x)dx$ (car $f(0) = 1$).
La fonction$f$ est de classe C^1 donc f' est continue. On peut donc utiliser le résultat des questions précédentes avec $g = f'$:

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 e^{-nx}f'(x)dx = 0.$$

De plus $e^{-n}f(1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi $J_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.