Correction Devoir maison 2

Exercice 1 – Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$

Initialisation : On montre la propriété au rang 1.

$$\frac{a^2-2a+1}{(a-1)^2a} = \frac{(a-1)^2}{(a-1)^2a} = \frac{1}{a}$$

Donc la propriété est vraie au rang 1.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, quelconque, fixé. On suppose que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{a^k} = \frac{a^{n+1}-(n+1)a+n}{(a-1)^2a^n}$.

Montrons la propriété au rang $n+1$.

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{a^k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{a^k} + \frac{n+1}{a^{n+1}}$.

Par hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{a^k} &= \frac{a^{n+1}-(n+1)a+n}{(a-1)^2a^n} + \frac{n+1}{a^{n+1}} \\
&= \frac{a^{n+1}a-(n+1)aa+na}{(a-1)^2a^{n+1}} + \frac{(a-1)^2(n+1)}{(a-1)^2a^{n+1}} \\
&= \frac{a^{n+1}a-(n+1)aa+na+(a^2-2a+1)(n+1)}{(a-1)^2a^{n+1}} \\
&= \frac{a^{n+2}-(n+1)a^2+na+(n+1)a^2-2a(n+1)+(n+1)}{(a-1)^2a^{n+1}} \\
&= \frac{a^{n+2}-a(n+2)+(n+1)}{(a-1)^2a^{n+1}}
\end{aligned}$$

Donc la propriété est héréditaire.

Conclusion On a montré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{a^k} = \frac{a^{n+1}-(n+1)a+n}{(a-1)^2a^n}$.

- Lorsque $a=1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{a^k} = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ (Somme des termes d'une suite arithmétique de raison 1 : faire la preuve par récurrence) donc $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
- Si $a \in]0,1[$, $a^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\displaystyle\frac{1}{(a^2-1)a^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$, car $(a^2-1)<0$,
  et $a^{n+1}-(n+1)a+n = a^{n+1}+n(1-a)-a \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, car $(1-a)>0$.
  Donc $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

– Si $a \in [1, +\infty[$, $a^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
On a
$$\frac{a^{n+1} - (n+1)a + n}{(a-1)^2 a^n} = \frac{a^{n+1}}{(a-1)^2 a^n} + \frac{n(1-a)}{(a-1)^2 a^n} - \frac{a}{(a-1)^2 a^n}$$

D'une part $\dfrac{a^{n+1}}{(a-1)^2 a^n} = \dfrac{a}{(a-1)^2}$,
D'autre part $\dfrac{n(1-a)}{(a-1)^2 a^n} = -\dfrac{1}{a-1}\dfrac{n}{a^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
De plus $\dfrac{a}{(a-1)^2 a^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Donc
$$u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{a}{(a-1)^2}.$$

Exercice 2 La fonction g est continue sur $[0, \frac{1}{2}[$ et sur $]\frac{1}{2}, 1]$ car la fonction f est continue, les fonctions $x \mapsto 2x$, et $x \mapsto 2x-1$ sont continues, et donc les composées sont continues. On montre que la fonction g est continue en $\frac{1}{2}$: on rappelle qu'une fonction est continue en a ssi ses limites à gauche et à droite en a sont égales. On calcule la limite à gauche :
$$\lim_{\substack{x \to \frac{1}{2} \\ x < \frac{1}{2}}} g(x) = \lim_{\substack{x \to \frac{1}{2} \\ x < \frac{1}{2}}} f(2x) = f(1).$$

De même à droite,
$$\lim_{\substack{x \to \frac{1}{2} \\ x > \frac{1}{2}}} g(x) = \lim_{\substack{x \to \frac{1}{2} \\ x > \frac{1}{2}}} f(2x-1) = f(0) = f(1).$$

Donc la fonction g est continue en $\frac{1}{2}$. On a bien que la fonction g est continue sur $[0, 1]$.

Exercice 3
1. On cherche le sens de variation de $(u_n)_{n\geq 0}$.
   $u_{n+1} - u_n = \frac{2}{u_n}$. On doit donc déterminer le signe de u_n : on montre par une récurrence facile que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 0$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n > 0$, donc la suite est croissante.
   On a donc deux possibilités : soit la fonction est convergente vers une limite $l \in \mathbb{R}^+$, soit elle tend vers $+\infty$. Raisonnons par l'absurde.
   On suppose que $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l$, avec $l \in \mathbb{R}^+$. l vérifie alors l'équation $l = l + \frac{2}{l}$ ce qui équivaut à $l^2 = l^2 + 2$. Cette équation n'est jamais vérifiée. Ainsi on a une contradiction, donc (u_n) ne converge pas, donc (u_n) diverge vers $+\infty$.
2. $v_{n+1} - v_n = ... = 1 + \frac{1}{u_n^2} > 1$ car $\frac{1}{u_n^2} > 0$. On montre que $v_n \geq n$ par récurrence :
   Initialisation $v_0 = \frac{1}{4} > 0$ donc la propriété est vraie au rang 0.
   Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque fixé. On suppose la propriété vraie au rang n : $u_n \geq n$.
   $v_{n+1} - v_n \geq 1 \Rightarrow v_{n+1} \geq v_n + 1 \Rightarrow v_{n+1} \geq n + 1$ par hypothèse de récurrence.
   Donc la propriété est héréditaire.
   Conclusion On a montré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \ \ v_n \geq n$.

3. On a vu à la question précédente que $v_{n+1} - v_n = 1 + \frac{1}{u_n^2} \Rightarrow v_{n+1} = v_n + 1 + \frac{1}{u_n^2}$. On a donc $v_{n+1} \leq v_n + 1 + \frac{1}{u_n^2}$. Or $v_n = \frac{u_n^2}{4} \Rightarrow u_n^2 = 4v_n$.
Donc $v_{n+1} \leq v_n + 1 + \frac{1}{4v_n}$. On a de plus montré que $v_n \geq n$, donc $\frac{1}{v_n} \leq \frac{1}{n}$ ($v_n > 0$). Ainsi, $v_{n+1} \leq v_n + 1 + \frac{1}{4n}$.
Pour montrer l'inégalité, on remarque que $\forall t \in [k-1, k], \quad \frac{1}{k} \leq \frac{1}{t}$. On intègre ensuite entre $k-1$ et k, $\forall k \geq 2$: $\displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{1}{k} dt \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t} dt$,
ce qui entraîne : $\displaystyle\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t} dt$, ce qui entraîne enfin :
$\displaystyle\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t} dt = \ln(k) - \ln(k-1)$.
On en déduit maintenant l'inégalité : $v_{k+1} - v_k \leq 1 + \frac{1}{4}[\ln(k) - \ln(k-1)]$
On fait alors la somme sur k de ces inégalités entre 2 et $n-1$. On reconnait à gauche une somme télescopique : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} [v_{k+1} - v_k] = v_n - v_2$.
De même à droite, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n-1} \left[1 + \frac{1}{4}(\ln(k) - \ln(k-1))\right] &= n - 2 + \frac{1}{4}\sum_{k=2}^{n-1}[\ln(k) - \ln(k-1)] \\ &= n - 2 + \frac{1}{4}(\ln(n-1) - \ln(1)).\end{aligned}$$

On a donc $v_n - v_2 \leq n - 2 + \frac{1}{4}\ln(n-1) \leq n + \frac{1}{4}\ln(n-1)$.
Ainsi on a bien l'inégalité : $v_n \leq v_2 + n + \frac{1}{4}\ln(n-1)$

4. On a donc $\displaystyle\frac{n}{n} \leq \frac{v_n}{n} \leq \frac{v_2}{n} + \frac{n}{n} + \frac{\ln(n-1)}{4n}$,
c'est à dire les inégalités :

$$1 \leq \frac{v_n}{n} \leq \frac{v_2}{n} + 1 + \frac{\ln(n-1)}{4n}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{v_2}{n} = 0$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(n-1)}{4n} = 0$.
Donc d'après le théorème de limite par encadrement, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{v_n}{n} = 1$.

Exercice 4 – On pose $y = 2x$. On remarque que l'égalité peut se réécrire

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad f(y) = f(\frac{y}{2})$$

On montre maintenant le résultat par récurrence :
Initialisation On initialise au rang 1 : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(\frac{x}{2})$. Donc la propriété est vraie au rang 1.
Hérédité On suppose la propriété vraie au rang n : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(\frac{x}{2^n})$. Montrons la propriété au rang $n+1$: on utilise l'égalité avec $z = \frac{x}{2^n}$, on a $f(z) = f(\frac{z}{2})$, et ainsi $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(\frac{x}{2^n}) = f(\frac{x}{2^{n+1}})$. D'ou par hypothèse de récurrence
$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(\frac{x}{2^{n+1}})$. Donc la propriété est héréditaire.
Conclusion On a montré par récurrence que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad f(x) = f(\frac{x}{2^n})$.

– $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{x}{2^n} = 0.$
Comme la fonction f est continue, $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to+\infty} f(\frac{x}{2^n}) = f(0)$. On passe donc à la limite dans l'égalité, et on obtient : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(0)$.

Exercice 5 Soit un réel $b > 1$ et $(a_k)_{k\geq 0}$ une suite convergente, on notera a sa limite.

1 $\sum_{k=0}^n b^k = \frac{b^{n+1}-1}{b-1}$ par la formule géométrique, on en déduit que $\sum_{k=0}^n b^k \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ car $b^{n+1} \longrightarrow \infty$ $(b > 1)$.

2 Montrons que

$$\frac{1}{\sum_{k=0}^n b^k} \sum_{k=0}^n b^k a_k \underset{n\to\infty}{\to} a.$$

Soit $\epsilon > 0$, il existe n_0 tel que $\forall k \geq n_0$, $|a_k - a| \leq \epsilon/2$. Premièrement

$$\frac{1}{\sum_{k=0}^n b^k} \sum_{k=0}^n b^k a_k - a = \frac{1}{\sum_{k=0}^n b^k} \sum_{k=0}^n b^k (a_k - a).$$

Par l'inégalité triangulaire :

$$|\frac{1}{\sum_{k=0}^n b^k} \sum_{k=0}^n b^k (a_k - a)| \leq \frac{1}{\sum_{k=0}^n b^k} \sum_{k=0}^n b^k |a_k - a|.$$

On découpe la somme en deux parties :

$$\frac{1}{\sum_{k=0}^n b^k} \sum_{k=0}^n b^k |a_k - a| = \frac{1}{\sum_{k=0}^n b^k} (\sum_{k=0}^{n_0-1} b^k |a_k - a| + \sum_{k=n_0}^n b^k |a_k - a|)$$

D'une part, comme $|a_k - a| \leq \epsilon$ pour $k \geq n_0$ on a :

$$\frac{1}{\sum_{k=0}^n b^k} \sum_{k=n_0}^n b^k |a_k - a| \leq \frac{\sum_{k=n_0}^n b^k}{\sum_{k=0}^n b^k} \epsilon/2 \leq \epsilon/2.$$

D'autre part, la quantité $\sum_{k=0}^{n_0-1} b^k |a_k - a|$ est constante (ne dépend pas de n) et d'après la première question 1.

$$\sum_{k=0}^n b^k \longrightarrow \infty.$$

Il existe donc un rang n_1 à partir duquel

$$\frac{1}{\sum_{k=0}^n b^k} \left(\sum_{k=0}^{n_0-1} b^k |a_k - a| \right) \leq \epsilon/2.$$

Pour $n \geq \max(n_0, n_1)$, on a à la fois

$$\frac{1}{\sum_{k=0}^n b^k} \sum_{k=n_0}^n b^k |a_k - a| \leq \frac{\sum_{k=n_0}^n b^k}{\sum_{k=0}^n b^k} \epsilon/2 \leq \epsilon/2$$

et

$$\frac{1}{\sum_{k=0}^{n} b^k}\left(\sum_{k=0}^{n_0-1} b^k|a_k - a|\right) \leq \epsilon/2.$$

On en déduit que

$$|\frac{1}{\sum_{k=0}^{n} b^k}\sum_{k=0}^{n} b^k a_k - a| \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

La quantité ϵ étant arbitraire, on a par définition la convergence souhaitée.

3 D'après la question 1, $\sum_{k=0}^{n} b^k = \frac{b^{n+1}-1}{b-1}$, on a donc par la question 2 :

$$\frac{b-1}{b^{n+1}-1}\sum_{k=0}^{n} b^k a_k \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$$

D'où

$$\frac{1}{b^{n+1}-1}\sum_{k=0}^{n} b^k a_k \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{a}{b-1}.$$

De plus, $\frac{b^{n+1}-1}{b^n} \to b$, donc

$$\frac{1}{b^n}\sum_{k=0}^{n} b^k a_k = \frac{b^{n+1}-1}{b^n}\frac{1}{b^{n+1}-1}\sum_{k=0}^{n} b^k a_k \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{ab}{b-1}.$$