Eléments de correction du DM-1

Exercice 1 *Autour des bornes inférieures et supérieures*

1) Déterminons, si elles existent, les bornes supérieures et inférieures de l'ensemble suivant :

$$A = \{(-1)^n + \frac{1}{\sqrt{n}}, n \in \mathbb{N}^*\}.$$

L'ensemble A est minoré par -1, majoré par 2. Par la propriété de la borne supérieure /inférieure de $\mathbb{R}$, l'ensemble A admet des bornes inférieures et supérieures.
Premièrement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(-1)^n + \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$. On a donc

$$\sup A = \max A = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Nous allons démontrer que la borne inférieure de A est -1. Soit $\epsilon > 0$, on cherche un élément x de A verifiant $x \leq -1 + \epsilon$. Cela revient à chercher un entier n tel que

$$(-1)^n + \frac{1}{\sqrt{n}} \leq -1 + \epsilon.$$

Prenons n impair, c'est à dire de la forme $2k + 1$ avec $k \geq 0$. Le réel

$$x = (-1)^{2k+1} + \frac{1}{\sqrt{2k+1}} = -1 + \frac{1}{\sqrt{2k+1}}$$

est un élément de A. Il suffit maintenant de déterminer k tel que $\frac{1}{\sqrt{2k+1}} \leq \epsilon$. On cherche k tel que $2k + 1 \geq \frac{1}{\epsilon^2}$. Ce qui équivaut à $k \geq \frac{1}{2}[\frac{1}{\epsilon^2} - 1]$.
– si $\frac{1}{2}[\frac{1}{\epsilon^2} - 1] \leq 0$ alors $k = 0$ convient.
– si $\frac{1}{2}[\frac{1}{\epsilon^2} - 1] > 0$ alors l'entier suivant convient

$$k = E\left(\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\epsilon^2} - 1\right]\right) + 1.$$

Finalement, vous pouvez considérer

$$k = \max\left\{0; E\left(\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\epsilon^2} - 1\right]\right) + 1\right\}.$$

Plus simplement, on peut dire que la suite $(\frac{1}{\sqrt{2k+1}}, k \geq 0)$ tend vers 0 quand k tend vers l'infini, et donc qu'il existe un rang à partir duquel les réels $\frac{1}{\sqrt{2k+1}}$ sont tous inférieurs à ϵ.
Vous pouvez utiliser le *critère séquentiel* : considérez par exemple la suite $(u_k, k \geq 1)$ définie par $u_k = -1 + \frac{1}{\sqrt{2k+1}}$. On a $\forall k \geq 0, u_k \in A$ et $u_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} -1$. Ce qui permet de conclure (plus rapidement).

2) Soient A et B deux parties non vides majorées de $\mathbb{R}^+$. Soit C l'ensemble défini par

$$C := \{xy | x \in A, y \in B\}.$$

Montrons que $\sup C = \sup A \sup B$. On a clairement, pour tout $(x, y) \in A \times B$, $0 \leq xy \leq \sup A \sup B$. Ce qui donne l'inégalité suivante

$$\sup A \sup B \geq \sup C. \quad (\star)$$

- Première méthode, en utilisant juste la définition :
  Si $\sup A = 0$ alors comme $A \subset \mathbb{R}^+$, $A = \{0\}$ et $C = \{0\}$, on a $\sup C = \sup A \sup B = 0$.
  Il reste le cas où $\sup A > 0$:
  Par définition, pour tout $(x, y) \in A \times B$, $xy \leq \sup C$. Pour tout $x > 0$ dans A (il en existe car $\sup A > 0$), on obtient
  $$y \leq \frac{\sup C}{x}.$$
  Ce qui implique $\sup B \leq \frac{\sup C}{x}$, (la borne supérieure de B est le plus petit majorant).
  De la même façon, pour tout $x \in A$, on a $x \leq \frac{\sup C}{\sup B}$, d'où découle $\sup A \leq \frac{\sup C}{\sup B}$ et l'inégalité :
  $$\sup A \sup B \leq \sup C. \quad (\star\star).$$
  Combinant les inégalités $(\star)$ et $(\star\star)$ on obtient le résultat.
- Deuxième méthode : "avec des epsilon" :
  Le cas $\sup A = 0$ ne pose pas de problème (voir ce qui est fait dans la première méthode).
  On se concentre sur le cas où $\sup A > 0$:
  Soit $\epsilon > 0$ tel que $\sup A - \epsilon \geq 0$ et $\sup B - \epsilon \geq 0$. Par définition, il existe $x \in A$ et $y \in B$ tel que :
  $$\sup A - \epsilon \leq x \text{ et } \sup B - \epsilon \leq y$$
  On a donc $0 \leq (\sup A - \epsilon)(\sup B - \epsilon) \leq xy$, ce qui donne :
  $$xy \geq \sup A \sup B - \epsilon(\sup A + \sup B) + \epsilon^2 \geq \sup A \sup B - (\sup A + \sup B)\epsilon$$
  L'élément xy de AB vérifie donc $\sup A \sup B - (\sup A + \sup B)\epsilon \leq xy$. Le réel ϵ étant *arbitrairement petit*, on a bien montré que $\sup A \sup B$ est le plus petit majorant.

  Remarque : pour retrouver exactement ϵ à la fin du raisonnement vous pouvez choisir x et y tels que $0 \leq \sup A - \epsilon' \leq x$ et $0 \leq \sup B - \epsilon' \leq y$ avec
  $$\epsilon' = \frac{\epsilon}{\sup A + \sup B}.$$
- Troisième méthode
  Par le critère séquentiel, il existe une suite $(a_n, n \geq 1)$ à valeurs dans A et $(b_n, n \geq 1)$ à valeurs dans B telles que
  $$a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sup A \text{ et } b_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sup B.$$
  La suite (c_n) définie par $c_n = a_n b_n$ est à valeurs dans C et converge vers $\sup A \sup B$. On a donc montré que $\sup C = \sup A \sup B$.

3) Etant donné $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'ensemble $A_n = \{k+\frac{n}{k}|k \in \mathbb{N}^*\}$. Premièrement, l'ensemble A_n est minoré par 1, donc il admet une borne infèrieure.

a) Montrons que $\inf A_n = \inf\{k + \frac{n}{k}|1 \leq k \leq n\}$. On a

$$A_n = \underbrace{\{k + \frac{n}{k}|1 \leq k \leq n\}}_{\text{contient } n+1} \cup \underbrace{\{k + \frac{n}{k}|k \geq n+1\}}_{\text{minoré par } n+1}.$$

Notez que nous avons $n+1 \in \{k + \frac{n}{k}|1 \leq k \leq n\}$, ce qui implique que le plus grand minorant de A_n est inférieure à $n+1$.

Montrons que si A et B sont deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$ minorés, alors :

$$\inf A \cup B = \min(\inf A; \inf B).$$

Tout d'abord comme $\inf A \cup B$ est le plus grand minorant de $A \cup B$, on a :

$$\inf A \cup B \geq \min\{\inf A, \inf B\}.$$

Deuxièmement, comme $A \subset A \cup B$, on a :

$$\inf A \geq \inf A \cup B$$

et de la même façon,

$$\inf B \geq \inf A \cup B,$$

d'où

$$\min\{\inf A, \inf B\} \geq \inf A \cup B.$$

Retournons à l'exercice, prenant $A = \{k + \frac{n}{k}; 1 \leq k \leq n\}$ et $B = \{k + \frac{n}{k}; n+1 \leq k\}$. On a $A_n = A \cup B$ donc $\inf A_n = \min\{\inf A, \inf B\}$. Or $\inf A \leq n+1 \leq \inf B$, donc $\inf A_n = \inf A$, ce que l'on veut démontrer.

b) Montrons que $\inf A_n \geq \sqrt{4n}$. On va montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $k + \frac{n}{k} \geq \sqrt{4n}$. Multipliant tout par $k > 0$, cela équivaut à $k^2 - k\sqrt{4n} + n \geq 0$, or $k^2 - k\sqrt{4n} + n = (k - \sqrt{n})^2 \geq 0$. On a donc bien l'inégalité recherchée. La suite de terme général $u_n = \inf A_n$ vérifie donc : $u_n \geq 2\sqrt{n}$.

$$2\sqrt{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

On en déduit directement que $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.

Exercice 2

Première partie

Déterminons si les suite suivantes convergent, et si oui, vers quoi :

– $u_n = (-1)^n$ ne converge pas, les termes alternent entre -1 et 1.

– Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $u_n = \frac{a^n}{n!}$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que :

$$\forall n \geq n_0,\ \frac{a}{n} \leq \frac{1}{2}.$$

On a donc pour $n \geq n_0$:

$$u_n = \frac{a^{n_0} \times \overbrace{a \times .... \times a}^{n-n_0 \text{ fois}}}{n_0!(n_0+1) \times ... \times n} \leq \frac{a^{n_0}}{n_0!} \frac{1}{2^{n-n_0}}$$

Le terme de droite tend vers 0 quand n tend vers l'infini car $0 < \frac{1}{2} < 1$. Par encadrement, on a

$$\frac{a^n}{n!} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0 .$$

- $u_n = \left(\frac{1}{2}+1\right)^n$. Prenons le logarithme : $\ln u_n = n \ln\left(1+\frac{1}{2}\right)$. Le réel $\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)$ est strictement positif, donc $\ln u_n \to \infty$ et passant à l'exponentiel : $u_n \to \infty$.
- $u_n = \left(2-\frac{1}{n}\right)^n$. On a $\ln u_n = n \ln\left(2-\frac{1}{n}\right)$. On a $\ln\left(2-\frac{1}{n}\right) \longrightarrow \ln(2) > 0$. On en déduit donc que les suites $(\ln u_n, n \geq 1)$ et $(u_n, n \geq 1)$ divergent vers $+\infty$.
- $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. On passe à nouveau au logarithme : $n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$. Si on passe brutalement à la limite vous tombez sur une forme indeterminée $\infty \times 0$. Pour lever cette indétermination, on considére le développement limité de $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ à l'ordre 2 :

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \underset{n \to \infty}{o}(n^{-2}).$$

On obtient :

$$\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \to 1,$$

et donc prenant à l'exponentielle

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e.$$

- $u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^2}$. On a pour tout $k \geq n+1$, $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{(n+1)^2}$. On en déduit :

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^2} \leq \frac{2n-(n+1)+1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n}.$$

Finalement, par encadrement $u_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$.

Deuxième partie

Soit $(u_n, n \geq 1)$ définie par : $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{n+\sqrt{n}}$.

1) $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+\sqrt{k}}$ pour $n \geq 1$.

2) On a : $\forall 0 \leq k \leq n$, $\sqrt{n} \geq \sqrt{k} \geq 0$ donc

$$\frac{1}{n+\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n+\sqrt{k}} \leq \frac{1}{n}.$$

3) On obtient

$$\frac{n+1}{n+\sqrt{n}} \leq u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+\sqrt{k}} \leq \frac{n+1}{n}.$$

Or $\frac{n+1}{n+\sqrt{n}} = \frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} + \frac{1}{n\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} \longrightarrow 1$. Par encadrement, on a $u_n \to 1$.

Problème

Le but du problème est d'étudier dans un premier temps la fonction f définie sur $[0, \infty[$ par

$$f : x \mapsto x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) + \frac{x}{4} + \frac{1}{2} \text{ et } f(0) = \frac{1}{2}$$

Partie A

I- Etude d'une fonction auxiliaire. Soit

$$g : x \in]0, \infty[\mapsto \ln(x+2) - \ln(x) - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{4}.$$

- a) Etudions le sens de variation de g. La fonction g est dérivable sur son ensemble de définition. Calculons g' :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x} + \frac{2}{(x+2)^2} \\ &= -\frac{4}{x(x+2)^2} < 0 \end{aligned}$$

  Donc la fonction g est décroissante.
- b) Déterminer la limite (sans oublier de justifier son existence) de g en $+\infty$. On a

$$g(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{4} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4},$$

  car $\ln\left(\frac{x+2}{x}\right) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
- c) En déduire le signe du réel $g(x)$, quand x parcourt $]0, +\infty[$. Comme g est décroissante : $\forall x > 0, g(x) \geq \frac{1}{4}$.
- d) Montrons que pour tout x dans l'intervalle $[2, 3]$, $g(x) < 1/2$. La fonction g est décroissante, donc

$$\forall x \in [2, 3], g(x) \leq g(2).$$

  Montrons que $g(2) - \frac{1}{2} < 0$. Cela revient à montrer que $\ln(2) < \frac{3}{4}$. On a $4\ln(2) = \ln(8) < 3$ car $e > 2$, et donc $e^3 > 8$.

II- – Démontrer que f est continue en $x = 0$. Posons $x = 1/t$, on a

$$\frac{1}{t} \ln\left(\frac{\frac{1}{t} + 2}{\frac{1}{t}}\right) = \frac{1}{t}\ln(2t+1) \longrightarrow 0.$$

  On a donc $f(x) \longrightarrow f(0) = \frac{1}{2}$. On parle de prolongement par continuité.
- La fonction f est-elle dérivable en 0 ? Etudions le taux d'accroissement en 0 :

$$\frac{f(h) - \frac{1}{4}}{h} = \ln\left(\frac{h+2}{h}\right) + \frac{1}{2} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \infty.$$

  La réponse est donc non.
- Un simple calcul donne $f' = g$, la fonction g étant positive, la fonction f est croissante.

– Montrons que $x\ln(\frac{x+2}{x}) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 2$. Utiliser le résultat (à connaître par coeur) $\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h} = 1$. En déduire la limite de f en $+\infty$. Remarquons que si on fait tendre x vers $+\infty$, on ne peut pas conclure directement, on a la forme indeterminée $\infty \times 0$. Calculons

$$\frac{1}{h}\ln\left(\frac{\frac{1}{h}+2}{\frac{1}{h}}\right) = \frac{1}{h}\ln(1+2h) = \frac{2}{2h}\ln(1+2h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 2.$$

Partie B

Dans cette partie, on désigne par I l'intervalle $[2,3]$.

I- – Soit h la fonction définie sur I par $h(x) = f(x) - x$. Montrer que pour tout $x \in I$, $h'(x) < 0$. (On remarquera que $h'(x) = g(x) - 1$)). On sait que pour tout $x \in [2,3]$, $h'(x) = g(x) - 1 \leq -\frac{1}{2} < 0$.

– La fonction h est décroissante. Montrons que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution dans I. On a $h(2) = 2\ln(2) - 1 > 0$ et $h(3) < 0$ (pénible à calculer). La fonction h étant continue, *par le théorème des valeurs intermédiaires*, il existe α telle que $h(\alpha) = 0$, cette solution est unique car h est strictement monotone.

II- II-1 Par la question d), on a pour tout $x \in I$, $0 < f'(x) < \frac{1}{2}$.

II-2 Utilisons le théorème des accroissements finis : pour tout $x \in I$,

$$|f(x) - f(\alpha)| \leq \sup_{[2,3]}|f'(x)||x-\alpha| \leq \frac{1}{2}|x-\alpha|.$$

On a $f(\alpha) = \alpha$, on obtient l'inégalité recherchée.

III- On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 2$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$ (pour le démontrer voir dans le cours la notion d'intervalle stable).

a) Par la question II-2 :

Pour tout n de $\mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| = |f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$ $(\star\star\star)$

Par récurrence, démontrons que

pour tout n de $\mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Initialisation :

$$|u_1 - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2}$$

Car $u_0 = 2$, $\alpha \in I$ implique $|u_0 - \alpha| = |2 - \alpha| \leq 1$.

Hérédité : supposons que $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, on a :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

La propriété est initialisée et héréditaire donc elle est vraie pour tout n.

b) Par l'encadrement : $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$, on a $|u_n - \alpha| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, la suite $(u_n, n \geq 0)$ converge vers α.

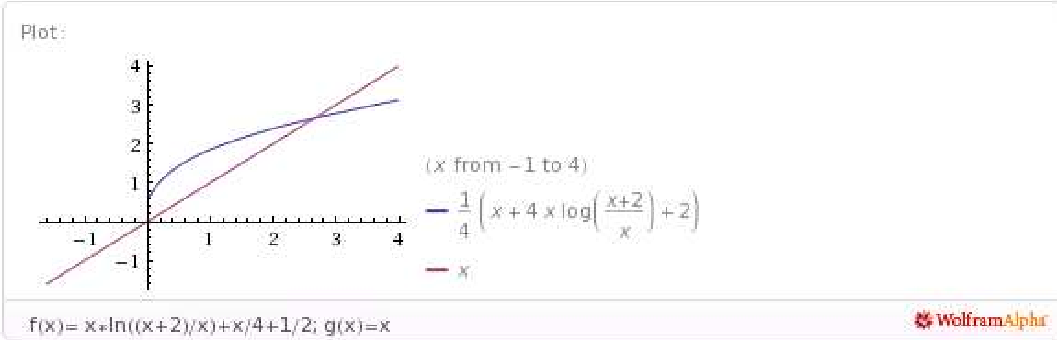

FIGURE 1 – La fonction f et la première bissectrice

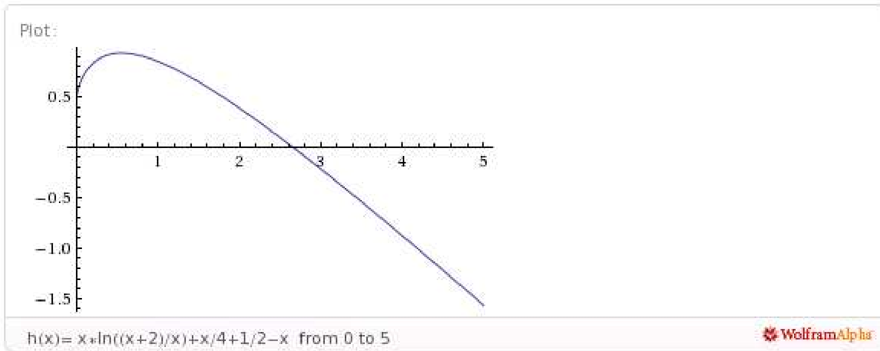

FIGURE 2 – La fonction h

Les suites vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$ sont appelées des suites récurrentes, elles seront étudiées bientôt. L'obtention d'inégalités du type de $(\star\star\star)$ permet souvent de conclure sur la convergence de la suite (u_n).