Préparation au CAPES : Exercices

1 Notion de probabilité, probabilité conditionnelle, indépendance et probabilité sur un univers fini

Exercice 1 Soit $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$. Décrire toutes les parties de Ω, puis vérifier que $\text{card}(\mathcal{P}(\Omega)) = 2^4$. Démontrer que si card $(\Omega) = n$ alors $\text{card}(\mathcal{P}(\Omega)) = 2^n$

Exercice 2 Montrer que pour tous $n, p \in \mathbb{N}$,

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p} \quad \text{et} \quad \binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}.$$

Exercice 3 Soient A , B et C trois parties d'un même ensemble E.

1. Justifier :
$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \quad \text{et} \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$
2. Justifier les relations ensemblistes suivantes :
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad \text{et} \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$
3. Donner une forme simplifiée des expressions :
$$(A \cup B) \cap (A \cup B^c) \quad \text{et} \quad (A \cup B) \cap (A^c \cup B) \cap (A^c \cup B^c).$$

Exercice 4 Exprimer chacun des événements suivants à l'aide des opérations de complémentation, union et intersection :
« A et B se réalisent, mais pas C » ;
« au moins un des trois événements A , B, C se réalise » ;
« au plus un des trois événements A , B, C se réalise » ;
« aucun des trois événements A , B, C se réalise » ;
« les trois événements A , B, C se réalisent ».

Exercice 5 Combien d'anagrammes peut-on obtenir en utilisant les lettres PHYSIQUE ? les lettres MATHEMATIQUES ?

Exercice 6 Soit Ω l'univers associé à l'expérience aléatoire consistant à lancer une pièce trois fois. Soit A l'événement « Face apparaît deux fois » , B l'événement « Face apparaît au moins deux fois » et C l'événement « Face apparaît lorsque Pile est apparu au moins une fois » . Donner les éléments de A, B, C, et décrire $A^c \cap B$, $A^c \cap B^c$, $A \cap C$.

Exercice 7 Donner un univers (on dit aussi espace des états, ou ensemble fondamental) pour les expériences aléatoires suivantes :
- Lancer d'une pièce de monnaie.

- Deux lancers successifs d'une même pièce de monnaie
- Lancer d'un dé
- Deux lancers successifs d'un même dé, et on s'intéresse à la somme des nombres obtenus
- Lancer d'un même dé indéfiniment
- Durée de vie d'un humain
- Promenade d'un ivrogne dans une rue (un pas en avant, un pas en arrière)
- Trajectoire d'une poussière sur la surface de l'eau pendant un intervalle de temps $[0, T]$.

Exercice 8 Décrire les événements suivants comme des sous-ensembles de l'espace des états Ω.
- Le premier jet donne pile
- La somme des résultats donne 4
- Le premier 1 est obtenu au N-ième lancer
- L'individu atteint au moins 50 ans
- L'ivrogne avance au N-ième pas.

Exercice 9 Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé quelconque (ici Ω n'est pas forcément fini).
- On considère $n+1$ événements $A_1, ..., A_n, A$ tels que $A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n \subset A$. Montrer que

$$\mathbb{P}[A] \geq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}[A_i] - (n-1).$$

- Un système est constitué de 3 composants, chacun tombant en panne avec probabilité $3/4$. Donner une minoration de la probabilité que les 3 composants tombent en panne simultanément.

Exercice 10 Quelle est la probabilité pour que sur k personnes, deux au moins aient leur anniversaire le même jour ? (on supposera qu'une année est composée de 365 jours). Pour quelles valeurs de k cette probabilité est $\geq 1/2$?

Exercice 11 On suppose que dans une course il y a n chevaux au départ et qu'ils ont la même chance de gagner. Calculer la probabilité de gagner le tiercé dans l'ordre, la probabilité de gagner le tiercé dans l'ordre ou dans un ordre différent, la probabilité de gagner le tiercé dans un ordre différent.

Exercice 12 Un joueur de poker reçoit une main de 5 cartes d'un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité qu'il reçoive :
- une seule paire (deux cartes de même hauteur)
- deux paires
- un brelan (exactement trois cartes de même hauteur, et pas de paire)
- un carré (quatre carte de même hauteur)
- un full (un brelan et une paire) ?

Exercice 13 Au loto, le joueur doit cocher 6 numéros dans une grille en comportant 49. Un tirage consiste à extraire, sans remise, 6 boules numérotées d'une urne, dont les numéros sont dits gagnants, et une 7-ième boule fournissant le numéro complémentaire. On est gagnant
- au premier rang : si on a coché les 6 numéros gagnants
- au second rang : si on a coché 5 numéros gagnants et que le 6-ème est le numéro complémentaire

– au troisième rang, si on a coché 5 numéros gagnants.

On considère une grille et on note

$$p_k = \mathbb{P}(\text{la grille est gagnante au k-ième rang}).$$

Calculer p_k pour $k \in 1, 2, 3$.

Exercice 14 On considère un système formé de six machines identiques dont la probabilité d'être en fonctionnement est p. Les fonctionnements des différents appareils sont supposés indépendants. Les machines peuvent être reliées de différentes façons :

- elles sont dites "en série" si et seulement si le système est en panne dés que l'une des machines est en pannes.
- elles sont dites "en parallèle" si et seulement si le système fonctionne dés que l'une des machines fonctionne.

Quelle est la probabilité que le système fonctionne lorsque :

- on a six machines en série ?
- on a six machines en parallèle ?
- on a deux groupes en série constituées chacune de trois machines en parallèle ?

Exercice 15 Un antivirus assure avec une fiabilité de $a = 95\%$ la détection d'un malware M lorsqu'il est effectivement présent. Cependant, le test indique aussi un résultat faussement "positif" pour $b = 1\%$ des systèmes réellement sains à qui on l'applique. On suppose qu 'une proportion $p = 0.5\%$ des systèmes ont le malware M.

1) En considérant que les paramètres a, b et p sont des probabilités, déterminer la probabilité qu'un système soit vraiment atteint sachant qu'il a un test positif ?

2) On suppose maintenant que a, b et p sont définis comme ci dessus mais qu'on ne connait plus leur valeur numérique. A quelles conditions sur ces valeurs le test est-il utile ?

Exercice 16 Une famille a deux enfants. On cherche la probabilité que les deux enfants soient des garçons, sachant qu'au moins un est un garçon ?

1) Prenons en compte l'âge des enfants : le plus jeune et le plus âgé peuvent être chacun des garçons. Donner l'univers. On suppose que chaque configuration a la même probabilité.
2) Calculer la probabilité.
3) Sachant maintenant que le plus jeune enfant est un garçon, quelle est la probabilité que les deux soient des garçons ?

Exercice 17 Une urne contient 9 boules numérotées de 1 à 9. On tire deux boules. Déterminer la probabilité d'obtenir 2 boules portant des numéros de même parité dans les cas suivants.

1) On tire les 2 boules simultanément.
2) On tire une boule, on ne la remet pas, on en tire une deuxième (on parle de **tirage sans remise**).
3) On tire une boule, on la remet, on en tire une deuxième **(tirage avec remise)**

Exercice 18 On considère deux urnes. Chaque urne contient des boules colorées. La première urne contient 2 boules blanches et 3 boules noires. La deuxième urne contient 3 blanches et 4 noires. On tire une boule au hasard dans la première urne et on la place dans la deuxième. On suppose que toutes les boules ont la même chance d'être tirée (rappeler le nom de cette hypothèse). On tire alors au hasard une boule dans la deuxième urne et on l'examine. Quelle est la probabilité que la boule soit noire ?

Exercice 19 Quelle est la probabilité d'obtenir un six en lançant un dé equilibré ? Quelle est la probabilité d'obtenir un double six en lançant deux dés equilibrés ? Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un six en lançant n fois un dé équilibré ? Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un double six en lançant n fois deux dés équilibres ?

Exercice 20 Les coefficients a, b, c de l'équation quadratique $ax^2+bx+c=0$ sont déterminés en lançant trois fois un dé équilibré. Quelle est la probabilité que les racines soient réelles ? Complexes non réelles ?

Exercice 21 Un domino est un rectangle comportant deux parties $[i|j]$. Sur chacune de ces parties figurent entre 0 et 6 points. Les dominos $[i|j]$ et $[j|i]$ ne sont pas distingués.

1. Combien de dominos différents peut-on ainsi obtenir ?
2. On suppose que l'on a un jeu complet de dominos. On prend l'un de ces dominos au hasard.
   (a) Quelle est la probabilité que ce soit un double ?
   (b) Quelle est la probabilité que la somme des points soit 6 ?
   (c) Quelle est la probabilité que ce soit un double si l'on sait que la somme des points vaut 6 ?
3. On retire du jeu les dominos dont la somme des points est 6, et on en tire un parmi les dominos restants. Quelle est la probabilité que ce soit un double ?
4. On dit que des dominos sont amis si l'une de leurs parties a le même nombre de points. A partir du jeu complet, on tire deux dominos. Quelle est la probabilité qu'ils soient amis ?

Exercice 22 On dispose de deux dés, l'un honnête , et l'autre pipé pour lequel la probabilité d'obtenir 6 est 1/3 tandis que les autres faces ont toutes la même probabilité.

1) On choisit un dé au hasard et on le lance. Quelle est la probabilité de faire 6 ?

2) On choisit un dé au hasard et on le lance 4 fois. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois 6 ?

3) On joue 4 fois en choisissant chaque fois au hasard l'un des dés. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois 6 ?

Exercice 23 On note Ω l'ensemble des huit résultats de trois lancers successifs d'une pièce de monnaie et on considère les deux événements suivants : A="le premier jet donne un pile", B="pile est amené au moins deux fois". Si on suppose que tous les éléments de Ω sont équibrobables, A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 24 On dispose de deux pièces A et B.

- La pièce A est équilibrée, au sens où elle donne face et pile avec probabilité $\frac{1}{2}$.
- La pièce B donne face avec probabilité p et pile avec probabilité $1-p$

On effectue une succession de lancers selon le procédé suivant :

- On choisit une des deux pièces A, B au hasard, on la lance
- A chaque lancer, si on obtient face, on garde la pièce pour le lancer suivant, sinon on change de pièce.

Pour tout entier naturel, on note A_n l'événement

« le n-ième lancer se fait avec la pièce A »

Soit $a_n = \mathbb{P}[A_n]$, l'objectif est d'étudier la suite $(a_n, n \geq 1)$.

1) Montrer que $a_1 = \frac{1}{2}$,
2) Montrer que $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + (1-p)(1-a_n)$,
3) Montrer que pour tout $n \geq 1$

$$a_n = \left(p - \frac{1}{2}\right)^{n-1} \left(\frac{1}{2} - \frac{1-p}{\frac{3}{2}-p}\right) + \frac{1-p}{\frac{3}{2}-p}$$

4) Déterminer la limite de $(a_n, n \geq 1)$.

2 Variables aléatoires discrètes et leurs lois.

Exercice 25 Soit n un entier naturel non nul. Une personne effectue n lancers indépendants d'une pièce parfaitement équilibrée. Soit X_n le nombre de "piles" obtenus.

1) Quelle est la loi de X_n ? quelle est son espérance ? sa variance ?
2) Calculer la probabilité pour qu'à l'issue des n lancers, le nombre de piles soit strictement supérieur au nombre de faces.

Exercice 26 Une urne contient N_b boules blanches, N_n boules noires. Posons $N = N_n + N_b$. On tire avec remise r boules de l'urne. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées. Déterminer la loi de X et reconnaître cette loi.

Exercice 27 On lance un dé à six faces non-truqué indéfiniment

- Décrire l'univers Ω associé à cette expérience aléatoire
- Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et A_n l'événement "on obtient 1 pour la premier fois au n-ième jet". Calculer la probabilité de l'événement A_n
- Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, B_n l'événement « on obtient 1 aux n premiers jets » et soit B l'événement « on obtient toujours 1 ». Calculer la probabilité de B_n et B

Exercice 28 Calculer la fonction de répartition de :

- la loi uniforme sur $\{1, ..., n\}$
- la loi de Bernoulli de paramètre p
- la loi Binomiale de paramètres 4 et $\frac{1}{2}$
- la loi géométrique de paramètre p.

Exercice 29 On admet que si $0 \leq x < 1$ et $r \in \mathbb{N}^\star$,

$$\frac{1}{(1-x)^r} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+r-1}{r-1} x^k$$

Considérons une urne contenant des boules blanches en proportion p, des boules noires en proportion $1-p$.
On effectue des tirages avec remise dans cette urne jusqu'à l'obtention de r boules blanches. Soit X le nombre de boules noires obtenues (avant la $r$ème boule blanche).

1) Calculer $\mathbb{P}[X = k]$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
2) Montrer que l'on obtient presque-sûrement r boules blanches
3) Calculer $\mathbb{E}[X]$.

Exercice 30 Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On en tire n une à une ($n \leq N$). On étudiera d'abord le cas **avec remise**, puis **sans remise**.
Soit X et Y le plus petit et le plus grand des nombres obtenus

a) Calculer $\mathbb{P}(X \geq x)$ pour tout $x \in [|1, n|]$. En déduire la loi de X.

b) Calculer $\mathbb{P}(Y \leq y)$ pour tout $y \in [|1, n|]$. En déduire la loi de Y.

Exercice 31 Soit a un nombre réel, et X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle que : pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}[X = k] = \frac{a}{2^k k!}$$

a) Déterminer a.

b) La variable aléatoire X admet elle une espérance ? Si oui, la déterminer.

c) La variable aléatoire X admet elle une variance ? Si oui, la déterminer.

Exercice 32 Un garagiste dispose de 2 voitures de location. Chacune est utilisable en moyenne 4 jours sur 5. Il loue les voitures avec une marge de 50 euros par jour et par voiture. On considère X la variable aléatoire égale au nombre de clients se présentant chaque jour pour louer une voiture. On suppose $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$ avec

$$\mathbb{P}[X = 0] = 0,1 \quad \mathbb{P}[X = 1] = 0,3 \quad \mathbb{P}[X = 2] = 0,4 \quad \mathbb{P}[X = 3] = 0,2.$$

a) Déterminer la loi de la variable aléatoire Y représentant le nombre de clients satisfaits par jour

b) Calculer la marge moyenne par jour.

Exercice 33 Une urne contient initialement une boule blanche et une boule rouge.
On effectue des tirages successifs d'une boule dans l'urne selon le protocole suivant : après chaque tirage, la boule tirée est remise dans l'urne et on rajoute dans l'urne une boule de la même couleur, avant le tirage suivant. Pour tout entier non nul n, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues au cours des n premiers tirages.

- Déterminer la loi de X_1.
- Déterminer la loi de X_2.
- Montrer que la loi de X_n est donnée par $\mathbb{P}(X_n = k) = \frac{1}{n+1}$.

Exercice 34 a) On va montrer que

$$\sum_{k=n-1}^{2n-1} \binom{k}{n-1} = \binom{2n}{n}.$$

a-1) Montrer que $\sum_{k=n-1}^{2n-1} \binom{k}{n-1}$ est le coefficient de X^{n-1} dans le polynôme

$$P(X) = \sum_{k=n-1}^{2n-1} (1 + X)^k.$$

a-2) En utilisant la formule $\sum_{k=n-1}^{2n-1} q^k = q^{n-1} \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$ pour $q \neq 1$, montrer que

$$P(X) = \frac{(1 + X)^{2n} - (1 + X)^{n-1}}{X},$$

en déduire le résultat.

b) Une urne contient n boules blanches et n boules noires. On tire les boules une à une sans remise. Soit X la variable aléatoire représentant le rang de sortie de la dernière boule noire. Déterminer la loi de X et $\mathbb{E}[X]$.

Exercice 35 On joue à pile ou face avec une pièce non équilibrée. A chaque lancer la probabilité d'obtenir pile est 2/3, et face 1/3. Les lancers sont supposés indépendants. On note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de lancers nécessaires pour l'obtention, pour la première fois de deux piles consécutifs.
Soit n un entier naturel non nul. On note p_n la probabilité de l'événement $(X = n)$.

1) Expliciter les événements $(X = 2), (X = 3), (X = 4), (X = 5)$. Déterminer la valeur de p_1, p_2, p_3, p_4 et p_5
2) A l'aide de la formule des probabilités totales, en distinguant deux cas selon le résultat du premier lancer, montrer que
$$\forall n \geq 3, p_n = \frac{2}{9}p_{n-2} + \frac{1}{3}p_{n-1}.$$
3) En déduire l'expression de p_n en fonction de n pour $n \geq 1$.
4) Calculer $\mathbb{E}[X]$.

Exercice 36 1) Déterminer α, β, γ tels que pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$,
$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{\alpha}{k} + \frac{\beta}{k+1} + \frac{\gamma}{k+2}$$
2) Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer a pour que
$$p_k = \frac{a}{k(k+1)(k+2)}$$
soit une loi de probabilité.
3) Cette loi de probabilité admet elle une espérance ? une variance ?

Exercice 37 (A faire !) Soit $\mathbb{P}$ une probabilité et X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^\star$.

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,
$$\sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}[X = k] = \left(\sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}[X > k]\right) - n\mathbb{P}(X > n).$$
2) On suppose que $\lim_{n\to\infty} n\mathbb{P}(X > n) = 0$ et que la série de terme général $u_k = \mathbb{P}(X > k)$ converge. Montrer que X admet une espérance et que
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X > k).$$
3) Réciproquement, on suppose que X admet une espérance. Montrer que
$$\lim_{n\to\infty} n\mathbb{P}(X > n) = 0$$
et en déduire
$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}[X > k].$$

Exercice 38 Soit X une v.a.r discrète telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$. Montrer que

1) Si $\mathbb{E}(X)$ existe, $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}[X \geq k]$.
2) Si $\mathbb{E}[X(X-1)]$ existe,

$$\mathbb{E}[X(X-1)] = 2\sum_{p=2}^{\infty}\sum_{n=p}^{\infty} \mathbb{P}[X \geq n].$$

Exercice 39 (Une marche aléatoire) On étudie le cours en bourse d'une action. On suppose que les variations journalières sont indépendantes les unes des autres. On convient de noter 0 le cours au début de l'observation. On suppose que chaque jour, l'action monte d'une unité (+1) avec probabilité p ou descend d'une unité (-1) avec probabilité $1-p$. On note X_{2n}, le cours constaté le $2n$-ème jour.
Par exemple si n=2, et que le cours à baisser les trois premiers jours et monté le quatrième jour, on a $X_4 = -1-1-1+1 = -2$

1) Quelles sont les valeurs prises par X_{2n} ?
2) On note Y_{2n} le nombre de jours parmi les $2n$ jours d'observation où l'action a monté ; et Z_{2n} le nombre de jours parmi les $2n$ jours, où l'action a baissé. Quelles sont les lois de probabilité de Y_{2n} et Z_{2n} ? Donner leur espérance.
3) Quelles relations lient d'une part n et $Y_{2n}Z_{2n}$, et d'autre part X_{2n}, Y_{2n} et Z_{2n} ?
   En déduire une expression de X_{2n}? Montrer que pour tout $k \in [|-n,n|]$

$$\mathbb{P}[X_{2n} = 2k] = \binom{2n}{n+k} p^{n+k} q^{n-k}$$

4) On suppose dans cette question que $p = \frac{1}{2}$, et on note p_n, la probabilité que l'action ait monté ou soit restée stable à l'issue des 2n jours d'observation. Montrer que

$$p_n = \frac{1}{2} + 2^{-(2n+1)}\binom{2n}{n}.$$

Exercice 40 Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{N}$.

- Déterminer en fonction de la loi de X et de la loi de Y, la loi de $Z = X + Y$.
- Déterminer la loi de $T = \min(X, Y)$.

Exercice 41

- Montrer que la somme de n variables aléatoires indépendantes de Bernoulli de paramètre p est une loi binomiale de paramètres n, p.
- Montrer que la somme de n variables aléatoires de Poisson de paramètres $\lambda_1, ..., \lambda_n$ respectivement est une loi de Poisson de paramètre $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$

3 Couples de variables aléatoires discrètes.

Exercice 42 (Loi multinomiale) Soit une urne contenant des boules blanches en proportion p, des boules rouges en proportion q, des boules noires en proportion r, $(p+q+r=1)$. On tire n boules avec remise

1) Calculer la probabilité de l'événement E= « on obtient x boules blanches, y boules rouges et z noires »

2) Soit X et Y les variables aléatoires définies par
   X est le nombre de boules blanches obtenues.
   Y est le nombre de boules rouges obtenues.

   a) Calculer la loi du couple (X, Y)
   b) Déterminer les lois marginales de X et Y et les lois de Y sachant $X = x$, et de X sachant $Y = y$.

Exercice 43 On considère un entier naturel N supérieur ou égal à 3. Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On y effectue des tirages successifs d'une boule avec remise de la boule tirée après chaque tirage, jusqu'à obtenir pour la première fois un numéro déjà tiré. On note alors T_N le rang aléatoire de ce dernier tirage.
Par exemple, si on a obtenu successivement les numéros 1-5-4-7-3-5, la variable T_N prend la valeur 6. Alors que si on a obtenu 5-4-2-2 la variable T_N prend la valeur 4.

1) Déterminer la loi, l'espérance et la variance de T_3.
2) Soit $N \geq 3$
   a) Déterminer l'ensemble des valeurs que peut prendre T_N.
   b) Calculer $\mathbb{P}[T_N = 2]$, $\mathbb{P}[T_N = 3]$ et $\mathbb{P}[T_N = N + 1]$
   c) Prouver pour tout entier k de $\{1, ..., N\}$, les égalités

$$\mathbb{P}[T_N > k] = \frac{N!}{(N-k)!N^k} = \prod_{i=0}^{k-1}\left(1 - \frac{i}{N}\right).$$

   En déduire la loi de la variable aléatoire T_N

Exercice 44 Une urne contient une boule blanche et une boule noire, les boules étant indiscernables au toucher. On y prélève une boule, chaque boule ayant la même probabilité d'être tirée, on note sa couleur, et on la remet dans l'urne avec c boules de la couleur de la boule tirée. On répète cette épreuve, on réalise ainsi une succession de tirages ($n \geq 2$).
On considère les variables aléatoires $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ définies par :

$X_i = 1$ si on obtient une boule blanche au i-ème tirage.
$X_i = 0$ sinon.

On définit, pour $2 \leq p \leq n$, la variable aléatoire Z_p par

$$Z_p = \sum_{i=1}^{p} X_i$$

1) Déterminer la loi du couple (X_1, X_2). En déduire la loi de X_2.
2) Déterminer la loi de Z_2
3) a) Déterminer $Z_p(\Omega)$. Soit $p \leq n - 1$
   b) Déterminer $\mathbb{P}(X_{p+1} = 1 | Z_p = k)$ pour $k \in Z_p(\Omega)$. En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que

$$\mathbb{P}[X_{p+1} = 1] = \frac{1 + c\mathbb{E}[Z_p]}{2 + pc}$$

c) Montrer par récurrence que pour tout $p \in [|1, n|]$,

$$\mathbb{P}[X_p = 1] = \mathbb{P}[X_p = 0] = \frac{1}{2}$$

Exercice 45 On considère n urnes numérotées de 1 à n. La première urne contient des boules blanches et des boules noires ; la proportion de boules blanches est p_1. Les urnes suivantes contiennent chacune a boules blanches et a boules noires.
On effectue n tirages de la manière suivante : on tire une boule de la premiere urne que l'on place dans la deuxième urne, puis on tire une boule de la deuxième urne que l'on place dans la troisième, et ainsi de suite jusqu'au tirage dans la dernière urne.

Pour $1 \leq k \leq n$, on désigne par X_j la variable aléatoire égale à 1 si la boule tirée dans la k-ième urne est blanche, égale à 0 si la boule tirée de la $k$ème urne est noire.

1) Déterminer les lois de probabilités de X_1 et X_2, puis leurs espérances et leurs variances en fonction de p_1 et de a.
2) Démontrer qu'il existe une valeur de p_1 pour laquelle X_1 et X_2 suivent la même loi de probabilité.
3) Pour cette valeur de p_1 étudier l'indépendance de X_1 et X_2. Pour $1 \leq k \leq n$, on pose $p_k = \mathbb{P}[X_k = 1]$ et $q_k = \mathbb{P}[X_k = 0]$.
4) Démontrer qu'il existe une matrice M dépendant de a telle que pour $k \in [|1, n-1|]$

$$\begin{pmatrix} p_{k+1} \\ q_{k+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} p_k \\ q_k \end{pmatrix}$$

5) Déterminer M^n pour $n \in \mathbb{N}$, puis déterminer la loi de X_n.
6) Déterminer $\lim_{n \to \infty} p_n$ et $\lim_{n \to \infty} q_n$.

Exercice 46 Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tel que : $\forall (j, k) \in \mathbb{N}^2$,

$$\mathbb{P}(\{X = j\} \cap \{Y = k\}) = \frac{(j+k)\lambda^{j+k}}{ej!k!}$$

a) Déterminer λ. (On pourra étudier $f : x \mapsto 2xe^{2x-1} - 1$) sur $\mathbb{R}_+$.
b) Déterminer les lois de X et de Y. Les variables X et Y sont elles indépendantes ?

Exercice 47 Soit X et Y deux variables indépendantes vérifiant :

$$\mathbb{P}[X = n] = \mathbb{P}[Y = n] = \frac{1}{4}\left(\frac{1 + a^n}{n!}\right)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Déterminer a.
2) Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $V(X)$
3) Déterminer la loi de $S = X + Y$.

Exercice 48 On dispose d'un dé équilibré à 6 faces et d'une pièce truquée telle que la probabilité d'apparition de pile soit égale à p. Soit N un entier naturel non nul. On effectue N

lancers du dé ; si n est le nombre de 6 obtenus, on lance alors n fois la pièce.
On définit trois variables aléatoires X, Y, Z de la manière suivante :

Z indique le nombre de 6 tirés parmi les N lancers de dé.

X indique le nombre de piles obtenus parmi les lancers de la pièce.

Y indique le nombre de faces obtenues au lancers de la pièce.

1) Préciser la loi de Z, son espérance, sa variance.
2) Pour $k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$, déterminer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}[X = k | Z = n]$.
3) Montrer que pour tout couple d'entiers naturels (k, n) :

$$\mathbb{P}[X = k \text{ et } Z = n] = \binom{n}{k}\binom{N}{n} p^k (1-p)^{n-k} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n} \left(\frac{1}{6}\right)^n \text{ si } 0 \leq k \leq n \leq N$$
$$= 0 \text{ sinon.}$$

4) Calculer la probabilité $\mathbb{P}(X = 0)$.
5) Montrer que pour tout couple d'entiers naturels (k, n) tels que $0 \leq k \leq n \leq N$

$$\binom{n}{k}\binom{N}{n} = \binom{N}{k}\binom{N-k}{n-k}.$$

En déduire la probabilité $\mathbb{P}(X = k)$.

6) Montrer que la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètre $(N, \frac{p}{6})$. Quelle est la loi de Y ?
7) Calculer la covariance de (X, Y). X et Y sont-elles indépendantes ?
8) Déterminer la loi du couple (X, Y).

Exercice 49 Soit X et Y deux variables aléatoires dans $\mathbb{N}^\star$, telles que

$$\mathbb{P}[\{X = i\} \cap \{Y = j\}] = \frac{a}{2^{i+j}}, \text{ pour tout } (i, i) \in \mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}^\star$$

a) Calculer a
b) Déterminer les lois marginales de X et Y.
c) X et Y sont elles indépendantes ?

Exercice 50 Soit X une variable aléatoire uniforme sur $[|1, n|]$ et Y une variable aléatoire uniforme sur $[|1, X|]$, déterminer la loi de Y et calculer $\mathbb{E}[Y]$.

Exercice 51 Soit n un entier naturel non nul, et X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes les deux des lois uniformes sur $\{1, ..., n\}$.

1. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$ et $\mathbb{P}(X \geq Y)$.
2. Déterminer la loi de $D = Y - X$.

Exercice 52 Soit X_1, X_2, X_3 des variables de Bernoulli, deux à deux indépendantes, prenant les valeurs 0 ou 1 avec probabilité $1/2$. On considère les variables

$$Y = X_1 X_2 \qquad \text{et} \qquad Z = X_2 X_3$$

1. Déterminer la loi jointe de (Y, Z).
2. En déduire les lois marginales de Y et Z.
3. Calculer $\text{Cov}(Y, Z)$ Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer l'espérance et la variance de $Y + Z$ et YZ

4 Exercices sur les variables aléatoires à densité

Exercice 53 On considère une fonction F définie par

$$F(x) = a \quad \text{si} \quad x \leq -1 \ ,$$

$$F(x) = bx + c \quad \text{si} \quad x \in]-1, 1[\ ,$$

$$F(x) = d \quad \text{si} \quad x \geq 1 \ .$$

1) Déterminer les valeurs de a, b, c et d pour que F soit une fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.
2) Représenter graphiquement F.
3) Déterminer la densité de probabilité associée à F.

Exercice 54 Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ définie par

$$\forall x \in [2, 4[\quad f(x) = \lambda \frac{1}{(1-x)^2} \ ; \quad f(x) = 0 \quad x \notin [2, 4[\ .$$

1) Déterminer $\lambda \in \mathbb{R}$ pour que f soit une densité de probabilité.
2) Soit X une variable aléatoire de densité f. Déterminer sa fonction de répartition F.
3) Calculer l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$ de la variable aléatoire X. On pourra utiliser les égalités

$$x = (x-1) + 1 \ , \quad x^2 = (x-1)^2 + 2(x-1) + 1 \ .$$

Exercice 55 Soit X une variable aléatoire réelle de densité p_X. Déterminer la densité de la variable aléatoire Y dans les cas suivants :
- $Y = aX + b$ où a, b sont des nombres réels et $a \neq 0$;
- $Y = X^2$;
- $Y = \exp(X)$.

Résoudre cet exercice en utilisant les deux méthodes suivantes : le calcul de la fonction de répartition, l'utilisation du théorème de transfert.

Exercice 56 Soit X une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.
- Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^\infty x^k e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ est convergente. En déduire que la variable aléatoire X admet des moments de tout ordre.
- Démontrer que l'application $x \in \mathbb{R} \mapsto p_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ est bien une densité de probabilité.
- Montrer que X admet 0 comme espérance et 1 comme variance.
- Montrer que la variable aléatoire $Y = \sigma X + m$ avec σ, m deux réels non-nuls suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$. En déduire que Y admet des moments de tout ordre et a pour espérance m et variance σ^2.

Exercice 57 On considère une variable aléatoire réelle X dont la fonction de répartition $F_X(x)$ est donnée par :

$$F_X(x) = 0 \quad \text{si} \quad x < 0$$

$$F_X(x) = 1 - (1 + \frac{x}{2}) e^{-\frac{x}{2}} \quad \text{si} \quad x \geq 0$$

1) $F_X(x)$ est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

2) Déterminer $\lim_{x\to+\infty} F_X(x)$. Interprétation ?
3) Calculer la densité de probabilité $f_X(x)$. Quel est le mode de X ?
4) Calculer l'espérance et l'écart-type de X.
représentative de $F_X(x)$.
5) Calculer $P(1 \leq X < 2)$.

Exercice 58 Soit T une variable aléatoire réelle, de densité de probabilité :

$$f_T(t) = 0 \quad \text{si} \quad t \notin [-1, +1]$$

$$f_T(t) = \lambda(1-t^2) \quad \text{si} \quad t \in [-1, +1]$$

1) Calculer λ et représenter graphiquement $f_T(t)$.
2) Déterminer la fonction de répartition $F_T(t)$ et tracer sa courbe représentative.
3) Calculer la probabilité de l'événement $|T| \geq \frac{1}{2}$. Représenter cette probabilité sur chacun des deux graphiques précédents.
4) Calculer l'espérance et la variance de T. Quelle est sa médiane ?

Exercice 59 Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$ (sa densité de probabilité, f_U est définie par $f_U(x) = \mathbf{1}_{[0,1]}(x)$). On pose

$$X = -\frac{1}{\lambda}\ln(U) \ ;$$

F_X est la fonction de répartition de X et f_X sa densité de probabilité.
1. Rappeler la fonction de répartition $F_U(x) = P(U \leq x)$, $x \in \mathbb{R}$, de la variable aléatoire U.
2. Déterminer la fonction de répartition F_X et la densité de probabilité de la variable aléatoire X.
3. Quelle est la loi de X ? Donner les valeurs de $E(X)$ et $V(X)$. On rappelle que

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = n! \ .$$

Exercice 60 La durée en heures de fonctionnement d'un ordinateur est une variable aléatoire continue de densité :

$$f : x \mapsto \lambda e^{-\frac{x}{100}} \text{ si } x \geq 0; 0 \text{ sinon.}$$

1) Calculer λ.
2) Quelle est la probabilité que l'ordinateur fonctionne entre 50 et 100 heures ?
3) Quelle est la probabilité qu'il fonctionne moins de 100 heures ?

Exercice 61 (Taux de panne) 1) On suppose que la durée de vie d'un composant électronique est une variable aléatoire X de densité f continue, strictement positive sur $\mathbb{R}_+^\star$ et nulle sur $\mathbb{R}_-$. On note F la fonction de répartition de X.
a) On désigne par t et h deux réels strictement positifs. Exprimer à l'aide de la fonction F la probabilité que le composant tombe en panne avant l'instant $t+h$ sachant qu'il fonctionnait à l'instant t. On appelle cette quantité $p(t,h)$.
b) Etablir que lorsque h est au voisinage de 0, alors $p(t,h) \sim \frac{f(t)}{1-F(t)}h$.

c) On définit

$$\lambda_X : t \mapsto \frac{f(t)}{1-F(t)}.$$

La fonction λ_X est appelée fonction "taux de panne". Calculer pour tout $t > 0$, $\int_0^t \lambda_X(u)du$. Déterminer une expression de la fonction de répartition F de X en fonction de λ_X.

d) Montrer que la fonction "taux de panne" est constante si et seulement si la variable X suit une loi exponentielle, c'est à dire de densité $f(x) = \mu e^{-\mu x}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^\star}$.

2) On suppose que l'unité de mesure est l'année. Soit X une variable aléatoire avec taux de panne $\lambda_X(t) = t^3$.

e) Quelle est la probabilité que l'appareil de taux de panne X survive plus d'un an ?

f) Quelle est la probabilité que cet appareil, âgé d'un an, survive plus de deux ans ?

Exercice 62 1) Quelle valeur de λ faut-il prendre pour que $f(x) = \lambda^2 x e^{-\lambda x} 1_{x\in\mathbb{R}_+}$ soit une densité ?

2) Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $V(X)$.

Exercice 63 1) Déterminer λ tel que $f : t \mapsto \lambda e^{-|t|}$ soit une densité sur $\mathbb{R}$. Soit X une variable aléatoire de densité f.

2) Déterminer la fonction de répartition associée.

3) Démontrer que tous les moments existent et qu'on a

$$\mathbb{E}[X^k] = \frac{1}{2}[1+(-1)^k]\int_0^\infty t^k e^{-t}dt.$$

4) On rappelle la définition de la fonction Gamma :

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt,$$

montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et en déduire $\mathbb{E}[X^k]$.

Exercice 64 (Loi de Cauchy) 1) Déterminer λ tel que $f(x) = \frac{1}{\lambda(1+x^2)}$ définie sur $\mathbb{R}$ soit une densité de probabilité.

2) Calculer sa fonction de répartition

3) Montrer que cette loi ne possède aucun moment.

Exercice 65 Soient N_1 et N_2 deux variables aléatoires gaussiennes centrées réduites indépendantes. Soit la variable aléatoire $C = \frac{N_1}{|N_2|}$. Déterminer la fonction de répartition de C et en déduire que C suit une loi de Cauchy.

Exercice 66 Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de loi gaussiennes de moyennes respectives m_1 et m_2 et de variances respectives σ_1^2 et σ_2^2. Montrer que $X_1 + X_2$ suit une loi gaussienne de paramètres $m_1 + m_2$ et $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$.

Exercice 67 Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de loi Gamma de paramètres (p, θ_1) et (p, θ_2). C'est à dire que X_i, $i = 1, 2$, a pour densité

$$f_i(x) = \frac{\theta_i}{\Gamma(p_i)} e^{-\theta_i x} x^{p-1} dx.$$

– Montrer que $X_1 + X_2$ suit une loi Gamma, donner son paramètre.
– On note
$$\beta(r,r') = \int_0^1 x^{r-1}(1-x)^{r'-1}dx.$$
Pour quelles valeurs de r, r' cette intégrale est-elle convergente ? Montrer que pour tout $r, r' > 0$,
$$\beta(r,r') = \frac{\Gamma(r)\Gamma(r')}{\Gamma(r+r')}.$$

Exercice 68 (Loi Gamma) On dit qu'une variable aléatoire Z suit une loi $\Gamma(\lambda, n)$, où $n \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in \mathbb{R}^+$, si Z a pour densité de probabilités la fonction :

$$f_Z(z) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\, z^{n-1}\, e^{-\lambda z}\ \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(z)$$

1) Vérifier que la loi $\Gamma(\lambda, n)$ est bien définie, puis calculer $E[Z]$, $E[Z^2]$ et $V[Z]$.

2) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\Gamma(\lambda, m)$ et $\Gamma(\lambda, n)$. Déterminer la loi jointe du couple (U, V) défini par :

$$U = X + Y\ , \quad V = \frac{X}{X+Y}$$

3) Déterminer les lois marginales de U et V ; ces variables sont-elles indépendantes ?

On donne :

$$\int_0^1 t^{m-1}\,(1-t)^{n-1}\,dt = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

où Γ est la fonction d'Euler :

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}\,e^{-t}\,dt$$

On rappelle que pour $z \in \mathbb{N}$, $\Gamma(z) = (z-1)!$.

Exercice 69 Une variable aléatoire X suit une loi normale $\mathcal{N}(m(\lambda), 1)$ où λ est un paramètre aléatoire prenant les valeurs $0, 1, 2$ avec les probabilités

$$P(\lambda = 0) = a \quad P(\lambda = 1) = 1 - 2a \quad P(\lambda = 2) = a\ .$$

La moyenne de X est donnée par $m(\lambda) = \lambda - 1$.

1. Quelles sont les conditions sur a pour que le support de P soit $\{0, 1, 2\}$?

2. Z suit une loi normale centrée réduite. Soit $x_\beta \in \mathbb{R}^+$, le réel tel que

$$\beta = P(Z > x_\beta)\ .$$

Déterminer en fonction de β les probabilités

$$P(Z < x_\beta)\ , \quad P(Z < -x_\beta)\ , \quad P(|Z| < x_\beta)\ .$$

3. La table de la loi gaussienne centrée réduite donne les valeurs β associées aux x_β.

$$x_\beta = 0 \ , \quad \beta = 0,5$$

$$x_\beta = 1 \ , \quad \beta = 0,159$$

$$x_\beta = 2 \ , \quad \beta = 0,023$$

Calculer, en fonction de a, la probabilité $P(-1 < X < 1)$.

5 Exercices sur les suites de variables aléatoires

Exercice 70 (Inégalité de Hölder) Soient p et q deux réels positifs tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soient X et Y deux variables aléatoires possédant respectivement un moment d'ordre p et un moment d'ordre q. L'inégalité d'Hölder que l'on va démontrer est

$$\mathbb{E}[|XY|] \leq (\mathbb{E}[|X|^p])^{\frac{1}{p}} (\mathbb{E}[|Y|^q])^{\frac{1}{q}}$$

1) Soient x, y deux réels positifs. En utilisant la concavité de ln, c'est-à-dire pour tout $\lambda \in]0,1[$
$$\ln(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda \ln(x) + (1-\lambda)\ln(y),$$
montrer l'inégalité (appelée inégalité de Young)
$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$
2) En posant $\tilde{X} = \frac{X}{\mathbb{E}[|X|^p]^{1/p}}$ et $\tilde{Y} = \frac{Y}{\mathbb{E}[|Y|^q]^{1/q}}$, montrer l'inégalité d'Hölder.
3) On suppose que X a un moment d'ordre s. Soit $0 \leq r \leq s$. En appliquant l'inégalité d'Hölder aux variables $|X|^r$ et 1 avec $p = \frac{s}{r}$, et $q = \frac{p}{p-1}$ son conjugué, montrer
$$\mathbb{E}[|X|^r] \leq \mathbb{E}[|X|^s]^{1/p}.$$
En déduire que X a un moment d'ordre r pour tout $r \leq s$.

Exercice 71 [Une loi forte des grands nombres] Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que pour tout $k \geq 1$, $\mathbb{E}[X_k] = 0$ et $\mathbb{E}[X_k^4] \leq K$ où K est un réel positif indépendant de k. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, on va montrer que

$$\frac{S_n}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ p.s.}$$

et

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{S_n}{n}\right)^4\right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

1) En utilisant le résultat de la dernière question de l'exercice précédent. Justifier que $\mathbb{E}[X_i^2]$, $\mathbb{E}[X_i^3]$ ont un sens. Montrer que
$$\mathbb{E}[S_n^4] = \mathbb{E}\left[\sum_{k\geq 1} X_k^4 + 6 \sum_{i<j} X_i^2 X_j^2\right].$$

2) Montrer que $\mathbb{E}[X_i^2]^2 \leq \mathbb{E}[X_i^4]$, en déduire

$$\mathbb{E}[S_n^4] \leq nK + 3n(n-1)K \leq 3Kn^2.$$

3) Montrer que

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n\geq 1}(S_n/n)^4\right] \leq 3K\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}.$$

En déduire que

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{S_n}{n}\right)^4\right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

4) Montrer que $\mathbb{E}\left[\sum_{n\geq 1}(S_n/n)^4\right] < \infty$ implique que

$$\mathbb{P}[S_n/n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0] = 1.$$

Exercice 72 Soient (X_i) une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Poisson de paramètre 1.

1) Quelle est la loi de $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$?
2) On pose $S_n^\star = \frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{\sqrt{Var(S_n)}}$. En utilisant le théorème central limite, déterminer

$$\lim \mathbb{P}(S_n^\star \leq 0).$$

3) En déduire un équivalent de $\sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!}$.

Exercice 73 On dispose d'un dé. On cherche à savoir s'il est truqué ou non. Pour cela on va étudier la différence entre la fréquence d'apparition de 6 lors de n lancers de dé et 1/6. Soit N_n le nombre de 6 obtenus parmi n lancers. Déterminer la loi de N_n. On définit f_n par :

$$f_n = \frac{N_n}{n}.$$

Déterminer l'espérance et la variance de f_n

1 En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que

$$\mathbb{P}\left(|F_n - \frac{1}{6}| \geq 0.01\right) \leq \frac{5}{36n \times 0.01^2}$$

2) Estimer avec l'inégalité précédente, le nombre de lancers que l'on doit effectuer pour qu'au cours de ces lancers la fréquence d'apparition de 6 diffère de 1/6 d'au plus 1/100 avec un risque d'erreur inférieur à 5/100 ?
3) Estimer ce nombre avec le théorème central limite.

Exercice 74 Un joueur pense qu'un dé est pipé. Il le lance 720 fois, et obtient six 150 fois. Quelle conclusion le joueur peut-il en tirer ?