1 TD1 : rappels sur les ensembles et notion de probabilité

1.1 Ensembles et dénombrement

Exercice 1 Soit $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$. Décrire toutes les parties de Ω, puis vérifier que $\mathrm{card}(\mathcal{P}(\Omega)) = 2^4$. Soit $k \leq n$ deux entiers positifs. Que représente $\binom{n}{k}$? A l'aide de la formule du binôme de Newton, démontrer que si $\mathrm{card}(\Omega) = n$ alors $\mathrm{card}(\mathcal{P}(\Omega)) = 2^n$

Exercice 2 Montrer que pour tous $n, p \in \mathbb{N}$,

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p} \quad \text{et} \quad \binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}.$$

Exercice 3 (A savoir) Soient A , B, et C trois parties d'un même ensemble E.

1. Justifier :
$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \quad \text{et} \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$
2. Justifier les relations ensemblistes suivantes :
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad \text{et} \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$
3. Donner une forme simplifiée des expressions :
$$(A \cup B) \cap (A \cup B^c) \quad \text{et} \quad (A \cup B) \cap (A^c \cup B) \cap (A^c \cup B^c).$$

Exercice 4 Donner un univers (on dit aussi espace des états, ou ensemble fondamental) pour les expériences aléatoires suivantes :
- Lancer d'une pièce de monnaie.
- Deux lancers successifs d'une même pièce de monnaie
- Lancer d'un dé
- Deux lancers successifs d'un même dé, et on s'intéresse à la somme des nombres obtenus
- Lancer d'un même dé indéfiniment
- Durée de vie d'un humain
- Promenade d'un ivrogne dans une rue (un pas en avant, un pas en arrière)
- Trajectoire d'une poussière sur la surface de l'eau pendant un intervalle de temps $[0, T]$.

Exercice 5 Décrire les événements suivants comme des sous-ensembles de l'espace des états Ω.
- Le premier jet donne pile
- La somme des résultats donne 4
- Le premier 1 est obtenu au N-ième lancer
- L'individu atteint au moins l'âge de 50 ans
- L'ivrogne avance au N-ième pas.

Exercice 6 Exprimer chacun des événements suivants à l'aide des opérations de complémentation, union et intersection :
« A et B se réalisent, mais pas C » ;
« au moins un des trois événements A , B, C se réalise » ;
« au plus un des trois événements A , B, C se réalise » ;
« aucun des trois événements A , B, C se réalise » ;
« les trois événements A , B, C se réalisent ».

Exercice 7 Soit Ω l'univers associé à l'expérience aléatoire consistant à lancer une pièce trois fois. Soit A l'événement « Face apparaît deux fois » , B l'événement « Face apparaît au moins deux fois » et C l'événement « Face apparaît lorsque Pile apparaît au moins une fois » . Donner les éléments de A, B, C, et décrire $A^c \cap B$, $A^c \cap B^c$, $A \cap C$.

Exercice 8 Combien de mots différents peut-on obtenir en utilisant les lettres PHYSIQUE ? les lettres MATHEMATIQUES ?

1.2 Probabilités

Exercice 9 Quelle est la probabilité d'obtenir un six en lançant un dé équilibré ? Quelle est la probabilité d'obtenir un double six en lançant deux dés équilibrés ? Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un six en lançant n fois un dé équilibré ? Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un double six en lançant n fois deux dés équilibrés ?

Exercice 10 Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé quelconque (ici Ω n'est pas forcément fini).
- On considère $n+1$ événements $A_1, ..., A_n, A$ tels que $A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n \subset A$. Montrer que

$$\mathbb{P}[A] \geq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}[A_i] - (n-1).$$

- Un système est constitué de 3 composants, chacun tombant en panne avec probabilité $3/4$. Donner une minoration de la probabilité que les 3 composants tombent en panne simultanément.

Exercice 11 On suppose que dans une course il y a n chevaux au depart et qu'ils ont la même chance de gagner. Calculer la probabilité de gagner le tiercé dans l'ordre, la probabilité de gagner le tiercé dans l'ordre ou dans un ordre différent, la probabilité de gagner le tiercé dans un ordre différent.

Exercice 12 Un joueur de poker reçoit une main de 5 cartes d'un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité qu'il reçoive :
- une seule paire (deux cartes de même hauteur)
- deux paires
- un brelan (exactement trois cartes de même hauteur, et pas de paire)
- un carré (quatre carte de même hauteur)
- un full (un brelan et une paire) ?

Exercice 13 Quelle est la probabilité pour que sur k personnes, deux au moins aient leur anniversaire le même jour ? (on supposera qu'une année est composée de 365 jours). Pour quelles valeurs de k cette probabilité est supérieure ou égale à $1/2$?

Exercice 14 Une famille a deux enfants. On cherche la probabilité que les deux enfants soient des garçons, sachant qu'au moins un est un garçon ?
1) On prend en compte l'âge des enfants : le plus jeune et le plus âgé peuvent être chacun des garçons. Donner l'univers. On suppose que chaque configuration a la même probabilité.
2) Calculer la probabilité.
3) Sachant maintenant que le plus jeune enfant est un garçon, quelle est la probabilité que les deux soient des garçons ?

Exercice 15 Une urne contient 9 boules numérotées de 1 à 9. On tire deux boules. Déterminer la probabilité d'obtenir 2 boules portant des numéros de même parité dans les cas suivants.
1) On tire les 2 boules simultanément.
2) On tire une boule, on ne la remet pas, on en tire une deuxième (on parle de **tirage sans remise**).
3) On tire une boule, on la remet, on en tire une deuxième **(tirage avec remise)**

Exercice 16 On considère deux urnes. Chaque urne contient des boules colorées. La première urne contient 2 boules blanches et 3 boules noires. La deuxième urne contient 3 blanches et 4 noires. On tire une boule au hasard dans la première urne et on la place dans la deuxième. On suppose que toutes les boules ont la même chance d'être tirée (rappeler le nom de cette hypothèse). On tire alors au hasard une boule dans la deuxième urne et on l'examine. Quelle est la probabilité que la boule soit noire ?

Exercice 17 Les coefficients a, b, c de l'équation quadratique $ax^2+bx+c=0$ sont déterminés en lançant trois fois un de équilibré. Quelle est la probabilité que les racines soient réelles ? Complexes non réelles ?

Exercice 18 Un domino est un rectangle comportant deux parties $[i|j]$. Sur chacune de ces parties figurent entre 0 et 6 points. Les dominos $[i|j]$ et $[j|i]$ ne sont pas distingués.

1. Combien de dominos différents peut-on ainsi obtenir ?
2. On suppose que l'on a un jeu complet de dominos. On prend l'un de ces dominos au hasard.
   (a) Quelle est la probabilité que ce soit un double ?
   (b) Quelle est la probabilité que la somme des points soit 6 ?
   (c) Quelle est la probabilité que ce soit un double si l'on sait que la somme des points vaut 6 ?
3. On retire du jeu les dominos dont la somme des points est 6, et on en tire un parmi les dominos restants. Quelle est la probabilité que ce soit un double ?
4. On dit que des dominos sont amis si l'une de leurs parties a le même nombre de points. A partir du jeu complet, on tire deux dominos. Quelle est la probabilité qu'ils soient amis ?

Exercice 19 On dispose de deux dés, l'un honnête, et l'autre pipé pour lequel la probabilité d'obtenir 6 est 1/3 tandis que les autres faces ont toutes la même probabilité.
1) On choisit un dé au hasard et on le lance. Quelle est la probabilité de faire 6 ?
2) On choisit un dé au hasard et on le lance 4 fois. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois 6 ?
3) On joue 4 fois en choisissant chaque fois au hasard l'un des dés. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois 6 ?

Exercice 20 On note Ω l'ensemble des huit résultats de trois lancers successifs d'une pièce de monnaie et on considère les deux événements suivants : A="le premier jet donne un pile", B="pile est amené au moins deux fois". Si on suppose que tous les éléments de Ω sont équibrobables, A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 21 On considère un système formé de six machines identiques dont la probabilité d'être en fonctionnement est p. Les fonctionnements des différents appareils sont supposés indépendants. Les machines peuvent être reliées de différentes façons :

- elles sont dites "en série" si et seulement si le système est en panne dés que l'une des machines est en panne.
- elles sont dites "en parallèle" si et seulement si le système fonctionne dés que l'une des machines fonctionne.

Quelle est la probabilité que le système fonctionne lorsque :

- on a six machines en série ?
- on a six machines en parallèle ?
- on a deux groupes en série constituées chacune de trois machines en parallèle ?

Exercice 22 On dispose de deux pièces A et B.

- La pièce A est équilibrée, au sens où elle donne face et pile avec probabilité $\frac{1}{2}$.
- La pièce B donne face avec probabilité p et pile avec probabilité $1-p$

On effectue une succession de lancers selon le procédé suivant :

- On choisit une des deux pièces A, B au hasard, on la lance
- A chaque lancer, si on obtient face, on garde la pièce pour le lancer suivant, sinon on change de pièce.

Pour tout entier naturel, on note A_n l'événement

« le n-ième lancer se fait avec la pièce A »

Soit $a_n = \mathbb{P}[A_n]$, l'objectif est d'étudier la suite $(a_n, n \geq 1)$.
1) Montrer que $a_1 = \frac{1}{2}$,
2) Montrer que $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + (1-p)(1-a_n)$,
3) On suppose que $p = 3/4$. Montrer que pour tout $n \geq 1$

$$a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \frac{1}{6} + \frac{1}{3}$$

4) Déterminer la limite de $(a_n, n \geq 1)$.

Exercice 23 Un antivirus assure avec une fiabilité de $a = 95\%$ la détection d'un malware M lorsqu'il est effectivement présent. Cependant, le test indique aussi un résultat faussement "positif" pour $b = 1\%$ des systèmes réellement sains à qui on l'applique. On suppose qu 'une proportion $p = 0.5\%$ des systèmes ont le malware M.
1) En considérant que les paramètres a, b et p sont des probabilités, déterminer la probabilité qu'un système soit vraiment atteint sachant qu'il a un test positif ?
2) On suppose maintenant que a, b et p sont définis comme ci dessus mais qu'on ne connait plus leur valeur numérique. A quelles conditions sur ces valeurs le test est-il utile ?

Exercice 24 Deux joueurs jouent une succession de coups qui peut être assimilée à une suite d'épreuves de Bernoulli où la probabilité de succès est $\frac{1}{2}$. Quand un joueur perd le coup, il verse 1 dollar à l'autre. Le capital du premier joueur est a dollars, celui du second est b dollars. Le jeu dure tant qu'aucun des joueurs n'a épuisé son capital et on s'intéresse à la probabilité de ruine de chacun des joueurs. On représente le problème à l'aide d'une *marche aléatoire* : une particule mobile sur un axe qui effectue un saut d'unité vers la droite lorsque le premier joueur gagne un coup, d'une unité vers la gauche lorsque c'est le second joueur. On suppose que la particule part de l'abscisse 0.
On désigne par p_k la probabilité que la particule atteigne l'origine lorsqu'elle part de k.

1) Montrer que $p_0 = 1$ et $p_{a+b} = 0$.
2) On désigne par A_k l'événement :« l'origine est atteinte à partir de l'abscisse k ». A l'aide de la formule des probabilités totales et des événements A_{k+1}, A_{k-1}, montrer que

$$p_k = \frac{1}{2}p_{k-1} + \frac{1}{2}p_{k+1}.$$

3) En déduire que $p_k = 1 - \frac{k}{a+b}$
4) Quelle est la probabilité de la ruine du premier joueur ? du second joueur ?

2 TD2 : Variables aléatoires et lois discrètes.

Exercice 25 Le trousseau de clefs d'un gardien de nuit comporte dix clefs, dont une seule ouvre la porte du poste de garde. Pour qu'il y pénètre, il y a deux scenarios possibles :

• Cas A : il prend une clef au hasard, l'essaie, la met de côté si elle n'ouvre pas, et ainsi de suite.

• Cas B : il prend une clef au hasard, l'essaie, mais la laisse sur le trousseau si elle n'ouvre pas, et ainsi de suite.

On désigne respectivement par X_A et X_B les variables aléatoires égales aux nombres d'essais (y compris le bon) avant succès, dans le premier et le second scénario. Déterminer la loi de probabilité et la fonction de répartition de X_A et de X_B.
Calculer $E[X_A]$ et $E[X_B]$.

Le gardien utilise la méthode B un jour sur trois. Un jour, après avoir essayé 8 clefs, il n'a toujours pas ouvert la porte. Quelle est la probabilité pour qu'il ait utilisé la méthode B ?

Exercice 26 On lance deux dés et on note X la différence en valeur absolue entre les résultats. Déterminer la loi de X.

Exercice 27 Un joueur lance une fléchette sur une cible de rayon 1 divisée en cercles concentriques de rayons respectifs $1/n$, $2/n$, ..$(n-1)/n$. Si la fléchette atteint la cible dans la couronne délimitée par les cercles de rayon i/n et $(i+1)/n$ le joueur gagne $n-i$. On suppose que le joueur atteint la cible avec probabilité 1 et que la probabilité qu'il atteigne une région donnée de la cible est proportionnelle à l'aire de cette région. Soit X le gain du joueur. Déterminer sa loi et son espérance.

Exercice 28 On dispose de dés et de pièces équilibrés. On realise l'expérience aléatoire suivante. On lance un dé à six faces. Si le résultat est 1 ou 2, on ne lance aucune pièce. Si le résultat est 3 ou 4, on lance une pièce. Si le résultat est 5 ou 6, on lance deux pièces.
On appelle X la variable alèatoire correspondant au nombre de fois que l'on a obtenu Pile avec les pièces.
1) Quelles sont les valeurs possibles de X ?
2) Donner la loi de X.
3) Que valent la moyenne et la variance de X ?

Exercice 29 Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = k-1) = \frac{k}{4}\mathbb{P}(x = k)$. Déterminer la loi de X. Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 30 Soit a un nombre réel, et X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle que : pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}[X = k] = \frac{a}{2^k k!}$$

a) Déterminer a.
b) La variable aléatoire X admet elle une espérance ? Si oui, la déterminer.
c) La variable aléatoire X admet elle une variance ? Si oui, la déterminer.

Exercice 31 Un garagiste dispose de 2 voitures de location. Chacune est utilisable en moyenne 4 jours sur 5. Il loue les voitures avec une marge de 50 euros par jour et par voiture. On considère X la variable aléatoire égale au nombre de clients se présentant chaque jour pour louer une voiture. On suppose $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$ avec

$$\mathbb{P}[X = 0] = 0,1 \quad \mathbb{P}[X = 1] = 0,3 \quad \mathbb{P}[X = 2] = 0,4 \quad \mathbb{P}[X = 3] = 0,2.$$

a) Déterminer la loi de la variable aléatoire Y représentant le nombre de clients satisfaits par jour
b) Calculer la marge moyenne par jour.

Exercice 32 Un couple décide d'arrêter les naissances de ses enfants à première fille, ou, à défaut, à un nombre maximum , $n = 5$. A chaque naissance la probabilité d'avoir un garçon est p et les sexes lors des différentes naissances sont indépendants. On note Y le nombre de garçons de la famille, et X le nombre de filles.

1. Quels sont les nombres possibles de filles dans une famille ? Calculer la probabilité que la famille ne soit composée que de garçons.
2. En déduire que X suit une loi de Bernoulli de paramètre $\pi = 1 - p^n$ et en déduire son espérance.
3. Montrer que la loi de Y est donnée par

$$\begin{array}{l} P(Y = k) = (1 - p)p^k \text{ si } k = 1, ..., n - 1 \\ P(Y = n) = p^n \end{array}$$

4. En déduire $\mathbb{E}[Y]$.

Exercice 33 On joue à pile ou face avec une pièce non équilibrée. A chaque lancer la probabilité d'obtenir pile est $2/3$, et face $1/3$. Les lancers sont supposés indépendants. On note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de lancers nécessaires pour l'obtention, pour la première fois de deux piles consécutifs.
Soit n un entier naturel non nul. On note p_n la probabilité de l'événement $(X = n)$.
1) Expliciter les événements $(X = 2), (X = 3), (X = 4), (X = 5)$. Déterminer la valeur de p_1, p_2, p_3, p_4 et p_5
2) A l'aide de la formule des probabilités totales, en distinguant deux cas selon le résultat du premier lancer, montrer que

$$\forall n \geq 3, p_n = \frac{2}{9}p_{n-2} + \frac{1}{3}p_{n-1}.$$

3) En déduire l'expression de p_n en fonction de n pour $n \geq 1$.
4) Calculer $\mathbb{E}[X]$.

Exercice 34 Soit $\mathbb{P}$ une probabilité et X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^\star$.

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$\sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}[X = k] = \left(\sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}[X > k]\right) - n\mathbb{P}(X > n).$$

2) On suppose que $\lim_{n\to\infty} n\mathbb{P}(X > n) = 0$ et que la série de terme général $u_k = \mathbb{P}(X > k)$ converge. Montrer que X admet une espérance et que

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > k).$$

3) Réciproquement, on suppose que X admet une espérance. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} n\mathbb{P}(X > n) = 0$$

et en déduire

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}[X > k].$$

Exercice 35 (Une marche aléatoire) On étudie le cours en bourse d'une action. On suppose que les variations journalières sont indépendantes les unes des autres. On convient de noter 0 le cours au début de l'observation. On suppose que chaque jour, l'action monte d'une unité (+1) avec probabilité p ou descend d'une unité (-1) avec probabilité $1 - p$. On note X_{2n}, le cours constaté le $2n$-ème jour.

Par exemple si n=2, et que le cours à baisser les trois premiers jours et monté le quatrième jour, on a $X_4 = -1 - 1 - 1 + 1 = -2$

1) Quelles sont les valeurs prises par X_{2n} ?
2) On note Y_{2n} le nombre de jours parmi les $2n$ jours d'observation où l'action a monté ; et Z_{2n} le nombre de jours parmi les $2n$ jours, où l'action a baissé. Quelles sont les lois de probabilité de Y_{2n} et Z_{2n} ? Donner leur espérance.
3) Quelles relations lient d'une part n et Y_{2n} et Z_{2n}, et d'autre part X_{2n}, Y_{2n} et Z_{2n} ?
   En déduire une expression de X_{2n}? Montrer que pour tout $k \in [| -n, n|]$

$$\mathbb{P}[X_{2n} = 2k] = \binom{2n}{n+k} p^{n+k} q^{n-k}$$

Exercice 36 1) Déterminer α, β, γ tels que pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$,

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{\alpha}{k} + \frac{\beta}{k+1} + \frac{\gamma}{k+2}$$

2) Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer a pour que

$$p_k = \frac{a}{k(k+1)(k+2)}$$

soit une loi de probabilité.

3) Cette loi de probabilité admet elle une espérance ? une variance ?

Exercice 37 Dans un jeu de hasard, la mise pour chaque partie est de 1 euro. L'observation montre qu'une partie est gagnée avec la probabilité $\frac{1}{10}$, perdue avec la probabilité $\frac{9}{10}$. Toute partie gagnée rapporte 3 euros. Les différentes parties sont indépendantes. Une personne décide de jouer N parties ($N \geq 2$). On note X_N la variable aléatoire représentant le nombre de parties gagnées et Y_N la variable aléatoire représentant le gain algébrique du joueur.

1. Donner la loi de X_N, ainsi que la valeur de l'espérance et de la variance de cette variable aléatoire.
2. Exprimer Y_N en fonction de X_N. En déduire la valeur de l'espérance et de la variance de Y_N.
3. La personne décide de jouer 60 parties. On admet que l'on peut approcher X_{60} par une loi de Poisson.
   (a) Donner le paramètre de cette loi de Poisson.
   (b) Montrer que le joueur perd moins de 50 euros si et seulement si $X_{60} \geq 4$.
   (c) À l'issue des 60 parties, quelle est la probabilité que le joueur perde moins de 50 euros ? On donnera le résultat en utilisant impérativement le tableau suivant.

FIGURE 1 – Table de Poisson donnant les probabilités cumulées $\sum_{i=0}^{k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}$

k	$\lambda = 3$	$\lambda = 4$	$\lambda = 5$	$\lambda = 6$	$\lambda = 7$
0	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009
1	0,1991	0,0916	0,0404	0,0174	0,0073
2	0,4232	0,2381	0,1247	0,0620	0,0296
3	0,6472	0,4335	0,2650	0,1512	0,0818
4	0,8153	0,6288	0,4405	0,2851	0,1730
5	0,9161	0,7851	0,6160	0,4457	0,3007

Exercice 38 Pour ce jeu, le participant lance successivement n boules au hasard dans N cases numérotées de 1 à N avec $N \geq 2$. On suppose que les différents lancers de boules sont indépendants et que la probabilité pour qu'une boule quelconque tombe dans une case donnée est $\frac{1}{N}$. Une case peut contenir plusieurs boules. Le gain étant fonction du nombre de cases atteintes, on étudie la variable aléatoire T_n égale au nombre de cases non vides à l'issue des n lancers.

1. Déterminer en fonction de n et N les valeurs prises par T_n (on distinguera deux cas : $n \leq N$ et $n > N$).
2. Donner les lois de T_1 et T_2.
3. Déterminer, lorsque $n \geq 2$, la probabilité des événements ($T_n = 1$), ($T_n = 2$), ($T_n = n$) (pour la dernière probabilité, on distinguera deux cas : $n > N$ et $n \leq N$).
4. À l'aide de la formule des probabilités totales, justifier l'égalité (I) suivante, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$.

$$(I) \qquad P(T_{n+1}=k)=\frac{k}{N}P(T_n=k)+\frac{N-k+1}{N}P(T_n=k-1)$$

5. Afin de calculer l'espérance $\mathbb{E}(T_n)$ de la variable T_n, on considère la fonction polynomiale G_n définie par :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ G_n(x)=\sum_{k=1}^{n}P(T_n=k)x^k$$

   (a) Quelle est la valeur de $G_n(1)$?

   (b) Exprimer $\mathbb{E}(T_n)$ en fonction de $G_n'(1)$.

   (c) En utilisant la relation (I), montrer que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ G_{n+1}(x)=\frac{1}{N}(x-x^2)G_n'(x)+xG_n(x)$$

   (d) En dérivant l'expression précédente, en déduire que :

$$\mathbb{E}(T_{n+1})=\left(1-\frac{1}{N}\right)E(T_n)+1$$

   (e) Prouver enfin que l'espérance de T_n est donnée par :

$$\mathbb{E}(T_n)=N\left(1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^n\right)$$

   (f) L'entier N étant fixé, calculer la limite de $\mathbb{E}(T_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$. Interpréter le résultat.

Exercice 39 1. Déterminer les fonctions génératrices des variables aléatoires de Bernoulli, binômiales, géométriques et de Poisson.

2. En déduire dans chacun des cas précédent les espérances et variances des variables aléatoires.

3 TD3 : Couples de variables aléatoires discrètes.

Exercice 40 1. Soit X et Y deux v.a. indépendantes de lois :

$$\begin{array}{ll} \mathbb{P}(X=1)=\frac{1}{2} & \mathbb{P}(Y=1)=\frac{1}{4} \\ \mathbb{P}(X=2)=\frac{1}{2} & \mathbb{P}(Y=2)=\frac{1}{2} \\ & \mathbb{P}(Y=3)=\frac{1}{4} \end{array}$$

   (a) Etablir les lois de (X,Y), $T=X+Y$ et $Z=XY$.

   (b) Calculer $\mathrm{cov}(X,Y)$.

   (c) Calculer les espérances $\mathbb{E}(X),\mathbb{E}(Y),\mathbb{E}(T),\mathbb{E}(Z)$.

2. La loi du couple (X,Y) est à présent définie de la façon suivante :

$$\begin{array}{ll} \mathbb{P}(X=1,Y=1)=0 & \mathbb{P}(X=2,Y=1)=\frac{1}{4} \\ \mathbb{P}(X=1,Y=2)=\frac{1}{2} & \mathbb{P}(X=2,Y=2)=0 \\ \mathbb{P}(X=1,Y=3)=0 & \mathbb{P}(X=2,Y=3)=\frac{1}{4} \end{array}$$

(a) X et Y sont-elles indépendantes ?
(b) Calculer $\mathrm{cov}(X, Y)$.
(c) Trouver la loi de X, Y, $T = X + Y$ et $Z = XY$.
(d) Calculer les espérances $\mathbb{E}(X), \mathbb{E}(Y), \mathbb{E}(T), \mathbb{E}(Z)$.

Exercice 41 (Minimum de deux variables aléatoires géométriques) Dans cet exercice, p désigne un réel de $]0, 1[$ et $q = 1 - p$. On considère deux variables aléatoires X et Y, indépendantes, et suivant toutes deux la même loi géométrique de paramètre p.

1. Soit $i \in \mathbb{N}^\star$. En remarquant que $(X \leq i) = \bigcup_{k=1}^{i} (X = k)$, montrer que $\mathbb{P}(X > i) = q^i$.
2. Vérifier que l'égalité précédente est encore vraie lorsque $i = 0$.
3. On définit une variable aléatoire Z en posant $Z = \min(X, Y)$, c'est-à-dire :
$$Z = \begin{cases} X & \text{si } X \leq Y \\ Y & \text{si } Y < X \end{cases}$$
Expliquer pourquoi, pour tout $i \in \mathbb{N}$:
$$(Z > i) = (X > i) \cap (Y > i)$$
4. En déduire $\mathbb{P}(Z > i)$, pour $i \in \mathbb{N}$.
5. Soit $i \in \mathbf{N}^*$. En utilisant le fait que $(Z > i - 1) = (Z > i) \cup (Z = i)$, calculer $\mathbb{P}(Z = i)$, pour $i \in \mathbb{N}^*$.
6. Démontrer que Z suit la loi géométrique de paramètre $1 - q^2$.

Exercice 42 (Loi multinomiale) Soit une urne contenant des boules blanches en proportion p, des boules rouges en proportion q, des boules noires en proportion r, $(p + q + r = 1)$. On tire n boules avec remise. Soient x, y, z entiers positifs tels que $x + y + z = n$. La probabilité de l'événement E= « on obtient x boules blanches, y boules rouges et z noires » est
$$\binom{n}{x}\binom{n-x}{y} p^x q^y r^z.$$
Soit X et Y les variables aléatoires définies par
X est le nombre de boules blanches obtenues.
Y est le nombre de boules rouges obtenues.

a) Calculer la loi du couple (X, Y)
b) Déterminer les lois marginales de X et Y et les lois de Y sachant $X = x$, et de X sachant $Y = y$.

Exercice 43 1) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois de Poisson respectives $\mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{P}(\mu)$.
a. Soit n un entier strictement positif. En remarquant que
$$\{X + Y = n\} = \bigcup_{k=0}^{n} \{X = k\} \cap \{Y = n - k\} \ ,$$

montrer que $X+Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$.
b. Calculer
$$\forall k \in \{0,1,\cdots,n\} \quad \mathbb{P}_{(X+Y=n)}(X=k)\ .$$
En déduire que la loi de probabilité conditionnelle de X sachant $(X+Y=n)$ est la loi binomiale
$$\mathcal{B}(n, \frac{\lambda}{\lambda+\mu})\ .$$

2) Application :
Soit deux échantillons d'articles produits en série. On sait que les nombres X et Y d'articles défectueux dans chacun des deux échantillons suivent respectivement des lois de Poisson $\mathcal{P}(2)$ et $\mathcal{P}(3)$. On réunit les deux échantillons. Sachant que le nombre total d'articles défectueux est 3, quelle est la probabilité de l'événement $(X \leq 1)$?

Exercice 44 Une urne contient une boule blanche et une boule noire, les boules étant indiscernables au toucher. On y prélève une boule, chaque boule ayant la même probabilité d'être tirée, on note sa couleur, et on la remet dans l'urne avec c boules de la couleur de la boule tirée. On répète cette épreuve, on réalise ainsi une succession de tirages ($n \geq 2$).
On considère les variables aléatoires $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ définies par :

$X_i = 1$ si on obtient une boule blanche au i-ème tirage.
$X_i = 0$ sinon.

On définit, pour $2 \leq p \leq n$, la variable aléatoire Z_p par
$$Z_p = \sum_{i=1}^{p} X_i$$

1) Déterminer la loi du couple (X_1, X_2). En déduire la loi de X_2.
2) Déterminer la loi de Z_2
3) a) Déterminer $Z_p(\Omega)$. Soit $p \leq n-1$
   b) Déterminer $\mathbb{P}(X_{p+1} = 1 | Z_p = k)$ pour $k \in Z_p(\Omega)$. En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que
$$\mathbb{P}[X_{p+1} = 1] = \frac{1 + c\mathbb{E}[Z_p]}{2 + pc}$$
   c) Montrer par récurrence que pour tout $p \in [|1, n|]$,
$$\mathbb{P}[X_p = 1] = \mathbb{P}[X_p = 0] = \frac{1}{2}$$

Exercice 45 On considère n urnes numérotées de 1 à n. La première urne contient des boules blanches et des boules noires ; la proportion de boules blanches est p_1. Les urnes suivantes contiennent chacune a boules blanches et a boules noires.
On effectue n tirages de la manière suivante : on tire une boule de la premiere urne que l'on place dans la deuxième urne, puis on tire une boule de la deuxième urne que l'on place dans la troisième, et ainsi de suite jusqu'au tirage dans la dernière urne.

Pour $1 \leq k \leq n$, on désigne par X_j la variable aléatoire égale à 1 si la boule tirée dans la kème urne est blanche, égale à 0 si la boule tirée de la $k$ème urne est noire.

1) Déterminer les lois de probabilités de X_1 et X_2, puis leurs espérances et leurs variances en fonction de p_1 et de a.
2) Démontrer qu'il existe une valeur de p_1 pour laquelle X_1 et X_2 suivent la même loi de probabilité.
3) Pour cette valeur de p_1 étudier l'indépendance de X_1 et X_2. Pour $1 \leq k \leq n$, on pose $p_k = \mathbb{P}[X_k = 1]$ et $q_k = \mathbb{P}[X_k = 0]$.
4) Démontrer qu'il existe une matrice M dépendant de a telle que pour $k \in [|1, n-1|]$

$$\begin{pmatrix} p_{k+1} \\ q_{k+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} p_k \\ q_k \end{pmatrix}$$

5) Déterminer M^n pour $n \in \mathbb{N}$, puis déterminer la loi de X_n.
6) Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} p_n$ et $\lim\limits_{n\to\infty} q_n$.

Exercice 46 Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tel que : $\forall (j, k) \in \mathbb{N}^2$,

$$\mathbb{P}(\{X = j\} \cap \{Y = k\}) = \frac{(j+k)\lambda^{j+k}}{ej!k!}$$

a) Déterminer λ. (On pourra étudier $f : x \mapsto 2xe^{2x-1} - 1$) sur $\mathbb{R}_+$.
b) Déterminer les lois de X et de Y. Les variables X et Y sont elles indépendantes ?

Exercice 47 On lance n fois ($n \geq 3$) une pièce de monnaie parfaitement équilibrée. Pour tout $i \in [|1, n|]$, on pose $A_i =$« on a obtenu pile au i-ème lancer ».

1. Soit X le nombre total de « piles » obtenu. Donner sa loi, son espérance et sa variance.
2. Si, à l'issue des n lancers, on obtient par exemple pile-pile-face-face-face-pile-..., on dit que l'on a une première série de longueur 2, parce qu'on a obtenu 2 piles au début (et pas plus), et une deuxième série de longueur 3, parce qu'on a obtenu ensuite 3 faces (et pas plus). Autre exemple : si l'on obtient face-face-pile-face-..., on a une première série de longueur 2 et une deuxième série de longueur 1. On note S_1 la longueur de la première série et S_2 la longueur de la deuxième série si elle existe. On convient de poser $S_2 = 0$ s'il n'y a pas de deuxième série, c'est-à-dire si $S_1 = n$. Déterminer $S_1(\Omega)$.
3. Justifier l'égalité $(S_1 = 1) = (A_1 \cap \overline{A_2}) \cup (\overline{A_1} \cap A_2)$. En déduire, en justifiant soigneusement, que $\mathbb{P}(S_1 = 1) = \dfrac{1}{2}$.
4. En étudiant l'événement $(S_1 = k)$ à la manière de la question précédente, démontrer que :
$$\forall k \in [|1, n-1|],\ \mathbb{P}(S_1 = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$$
5. Démontrer que $\mathbb{P}(S_1 = n) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$.
6. Vérifier, en utilisant les formules obtenues dans les deux questions précédentes, que :
$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(S_1 = k) = 1$$
7. Calculer l'espérance de S_1 (on pourra utiliser la formule de l'exercice **??**).

8. Justifier l'égalité $S_2(\Omega) = [|0, n-1|]$.
9. Calculer $\mathbb{P}(S_2 = 0)$.
10. Soit $k \in [|1, n|]$. Montrer que :

$$\mathbb{P}(S_2 = 1 | S_1 = k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k = n \\ 1 & \text{si } k = n-1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } k \leq n-2 \end{cases}$$

11. En déduire que :

$$\mathbb{P}(S_2 = 1) = \frac{1}{2}$$

Exercice 48 Soit X et Y deux variables indépendantes vérifiant :

$$\mathbb{P}[X = n] = \mathbb{P}[Y = n] = \frac{1}{4}\left(\frac{1 + a^n}{n!}\right)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.
1) Déterminer a.
2) Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $V(X)$
3) Déterminer la loi de $S = X + Y$.

Exercice 49 On admet que si $0 \leq x < 1$ et $r \in \mathbb{N}^\star$,

$$\frac{1}{(1-x)^r} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+r-1}{r-1} x^k$$

Considérons une urne contenant des boules blanches en proportion p, des boules noires en proportion $1-p$.
On effectue des tirages avec remise dans cette urne jusqu'à l'obtention de r boules blanches. Soit X le nombre de boules noires obtenues (avant la $r$ème boule blanche).
1) Calculer $\mathbb{P}[X = k]$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
2) Montrer que l'on obtient presque-sûrement r boules blanches
3) Calculer $\mathbb{E}[X]$.

Exercice 50 On dispose d'un dé équilibré à 6 faces et d'une pièce truquée telle que la probabilité d'apparition de pile soit égale à p. Soit N un entier naturel non nul. On effectue N lancers du dé ; si n est le nombre de 6 obtenus, on lance alors n fois la pièce.
On définit trois variables aléatoires X, Y, Z de la manière suivante :

Z indique le nombre de 6 tirés parmi les N lancers de dé.
X indique le nombre de piles obtenus parmi les lancers de la pièce.
Y indique le nombre de faces obtenues au lancers de la pièce.

1) Justifier que $X + Y = Z$ et que si $Z = 0$ alors$X$ et Y valent 0

1) Préciser la loi de Z, son espérance, sa variance.
2) Pour $k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$, déterminer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}[X = k | Z = n]$.

3) Montrer que pour tout couple d'entiers naturels (k, n) :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X = k \text{ et } Z = n] &= \binom{n}{k}\binom{N}{n} p^k (1-p)^{n-k} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n} \left(\frac{1}{6}\right)^{n} \quad \text{si } 0 \leq k \leq n \leq N \\ &= 0 \text{ sinon.}\end{aligned}$$

4) Calculer la probabilité $\mathbb{P}(X = 0)$.

5) Montrer que pour tout couple d'entiers naturels (k, n) tels que $0 \leq k \leq n \leq N$

$$\binom{n}{k}\binom{N}{n} = \binom{N}{k}\binom{N-k}{n-k}.$$

En déduire la probabilité $\mathbb{P}(X = k)$.

6) Montrer que la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètre $(N, \frac{p}{6})$. Quelle est la loi de Y ?

7) Calculer la covariance de (X, Y). X et Y sont-elles indépendantes ?

8) Déterminer la loi du couple (X, Y).

Exercice 51 Soient X et Y deux variables aléatoires dans $\mathbb{N}^\star$, telles que

$$\mathbb{P}[\{X = i\} \cap \{Y = j\}] = \frac{a}{2^{i+j}}, \text{ pour tout } (i, i) \in \mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}^\star$$

a) Calculer a

b) Déterminer les lois marginales de X et Y.

c) X et Y sont elles indépendantes ?

Exercice 52 Soit Λ une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre μ et X une variable aléatoire de paramètre Λ. Quelle est la loi de X ? déterminer $\mathbb{E}[X]$?

Exercice 53 Soit X une variable aléatoire uniforme sur $[|1, n|]$ et Y une variable aléatoire uniforme sur $[|1, X|]$, déterminer la loi de Y et calculer $\mathbb{E}[Y]$.

Exercice 54 Soit une pièce avec probabilité d'avoir face p.

– On lance la pièce n fois, on note X et Y le nombre de faces et le nombre de piles. Quelles sont les lois de X et Y ? Montrer que X et Y ne sont pas indépendantes.
– On lance maintenant la pièce N fois où N suit une loi de Poisson. A nouveau, on note X et Y le nombre de faces et le nombre de piles. Montrer que X et Y sont indépendants.

Exercice 55 Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\{0, ..., m\}$. Soit $x \in \{0, ..., m\}$, on note $\mathbb{E}_{(X=x)}[Y]$ l'espérance de Y par rapport à la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{(X=x)}(.)$; c'est-à-dire

$$\mathbb{E}_{X=x}[Y] = \sum_{k=0}^{m} k \mathbb{P}_{(X=x)}[Y = k].$$

Montrer que

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{x=0}^{m} \mathbb{E}_{(X=x)}[Y] \mathbb{P}[X = x].$$

Exercice 56 On fait passer un examen sous forme d'un QCM (questions à choix multiples). L'examen se compose de 20 questions tirées au hasard et sans remise parmi 100 questions possibles. A chaque question est proposée 4 réponses possibles, seule une réponse est correcte. Si le candidat choisit la bonne réponse il a un point, sinon 0 point.

On considère un candidat ayant appris une proportion p du programme ($100p \in \mathbb{N}$). On cherche à étudier la variable aléatoire N correspondant à sa note.

1) On note X le nombre de questions figurant parmi les 20 que le candidat a révisées. Justifier que X suit une loi hypergéométrique de paramètres $(100, 20, p)$, c'est-à-dire que X prend ses valeurs dans l'ensemble $[|\max(0, 20 - 100(1-p)), \min(20, 100p)|]$ et qu'on a

$$\mathbb{P}(X = x) = \frac{\binom{100p}{x}\binom{100(1-p)}{20-x}}{\binom{100}{20}}.$$

A quelles conditions sur p, la variable aléatoire X prend-elle ses valeurs dans $[|0, ..., 20|]$? On supposera que ces conditions sont vérifiées. Ces X questions rapportent X points au candidat.

2) Le nombre de questions non révisées par le candidat est $20 - X$. Lorsque le candidat ne connaît pas la réponse à la question, il choisit uniformément au hasard une réponse. Quelle est la probabilité que le candidat choisisse la bonne réponse en répondant à une de ces questions ?

3) On note Y le nombre de points obtenus en répondant aux questions non révisées. A chaque question parmi les $20-X$, on associe une variable aléatoire X_i qui vaut 1 si le candidat choisit la bonne réponse à la question i, 0 sinon. On supposera que ces variables sont indépendantes. Ecrire Y en fonction de X et des X_i. Soit $x \in \mathbb{N}$, sachant $X = x$, justifier que Y suit une loi binomiale de paramètres $(20 - x, \frac{1}{4})$.

4) En remarquant que $\mathbb{P}[Y = 0, X = 20] = \mathbb{P}[X = 20] > 0$ (le justifier), montrer que les variables aléatoires Y et X ne sont pas indépendantes.

5) On détermine maintenant la loi de $N = X + Y$. Montrer les égalités

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[N = n] &= \sum_{x=0}^{n} \mathbb{P}[X = x, Y = n - x] \\
&= \sum_{x=0}^{n} \mathbb{P}[X = x]\mathbb{P}[Y = n - x | X = x] \\
&= \sum_{x=0}^{n} \frac{\binom{100p}{x}\binom{100(1-p)}{20-x}}{\binom{100}{20}} \binom{20-x}{n-x} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-x} \left(\frac{3}{4}\right)^{20-n}.
\end{aligned}$$

6) On rappelle que si X suit une loi hypergéométrique de paramètres $(100, 20, p)$, $\mathbb{E}[X] = 20p$. En partant de l'égalité $N = X + Y$, et en vous aidant de la question préliminaire, déterminer en fonction de p l'espérance de N.

7) **Cette question ne dépend que du résultat de la question 6**
On admet que N admet un moment d'ordre 2. On considère un échantillon $(n_1, ..., n_k)$ de notes correspondant au QCM. On souhaite estimer la proportion du cours assimilée par un étudiant. On propose

$$\hat{p}(n_1, ..., n_k) = \frac{1}{15}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} n_i - 5\right).$$

Rappel : un estimateur est :
– sans biais si pour tout $k \geq 1$ $\mathbb{E}[\hat{p}(N_1, ..., N_k)] = p$ où $N_1, ..., N_k$ sont des variables aléatoires indépendantes de même loi que N la variable aléatoire représentant la note d'un étudiant,
– convergent si $\hat{p}(N_1, ..., N_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} p$ en probabilité.
Montrer que $\hat{p}$ est sans biais, rappeler l'énoncé de la loi faible des grands nombres et en déduire qu'il est convergent.

8) On suppose maintenant que l'on attribue des points négatifs aux mauvaises réponses. On enlève 1/5 de point à chaque mauvaise réponse et on note $\tilde{N}$ la note obtenue. Sans chercher la loi explicite de la note, démontrer que

$$\mathbb{E}[\tilde{N}] = 18p + 2.$$

9)-bonus Montrer que N admet un moment d'ordre 2. On rappelle que la loi hypergéométrique en admet un.

4 TD4 : Variables aléatoires à densité.

Exercice 57 On considère une fonction F définie par

$$F(x) = a \quad \text{si} \quad x \leq -1 \ ,$$

$$F(x) = bx + c \quad \text{si} \quad x \in]-1, 1[\ ,$$

$$F(x) = d \quad \text{si} \quad x \geq 1 \ .$$

1) Déterminer les valeurs de a, b, c et d pour que F soit une fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.
2) Représenter graphiquement F.
3) Déterminer la densité de probabilité associée à F.

Exercice 58 Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ définie par

$$\forall x \in [2, 4[\quad f(x) = \lambda\frac{1}{(1-x)^2} \ ; \quad f(x) = 0 \quad x \notin [2, 4[\ .$$

1) Déterminer $\lambda \in \mathbb{R}$ pour que f soit une densité de probabilité.
2) Soit X une variable aléatoire de densité f. Déterminer sa fonction de répartition F.
3) Calculer l'espérance $E(X)$ et la variance $\mathbb{V}(X)$ de la variable aléatoire X. On pourra utiliser les égalités

$$x = (x-1) + 1 \ , \quad x^2 = (x-1)^2 + 2(x-1) + 1 \ .$$

Exercice 59 La durée en heures de fonctionnement d'un ordinateur est une variable aléatoire continue de densité :

$$f : x \mapsto \lambda e^{-\frac{x}{100}} \text{ si } x \geq 0; 0 \text{ sinon.}$$

1) Calculer λ.
2) Quelle est la probabilité que l'ordinateur fonctionne entre 50 et 100 heures ?
3) Quelle est la probabilité qu'il fonctionne moins de 100 heures ?

Exercice 60 1) Quelle valeur de λ faut-il prendre pour que $f(x) = \lambda^2 x e^{-\lambda x} 1_{x \in \mathbb{R}_+}$ soit une densité ?
2) Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{V}(X)$.

Exercice 61 1) Déterminer λ tel que $f : t \mapsto \lambda e^{-|t|}$ soit une densité
2) Déterminer la fonction de répartition associée
3) Calculer les deux premiers moments

Exercice 62 On considère une variable aléatoire réelle X dont la fonction de répartition $F_X(x)$ est donnée par :

$$F_X(x) = 0 \quad \text{si} \quad x < 0$$
$$F_X(x) = 1 - (1 + \frac{x}{2}) e^{-\frac{x}{2}} \quad \text{si} \quad x \geq 0$$

1) $F_X(x)$ est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
2) Déterminer $\lim_{x \to +\infty} F_X(x)$.
3) Calculer la densité de probabilité $f_X(x)$.
4) Calculer l'espérance et l'écart-type de X.
5) Calculer $P(1 \leq X < 2)$.

Exercice 63 Soit T une variable aléatoire réelle, de densité de probabilité :

$$f_T(t) = 0 \quad \text{si} \quad t \notin [-1, +1]$$
$$f_T(t) = \lambda(1 - t^2) \quad \text{si} \quad t \in [-1, +1]$$

1) Calculer λ et représenter graphiquement $f_T(t)$.
2) Déterminer la fonction de répartition $F_T(t)$ et tracer sa courbe représentative.
3) Calculer la probabilité de l'événement $|T| \geq \frac{1}{2}$. Représenter cette probabilité sur chacun des deux graphiques précédents.
4) Calculer l'espérance et la variance de T.

Exercice 64 Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$ (sa densité de probabilité, f_U est définie par $f_U(x) = \mathbf{1}_{[0,1]}(x)$). On pose

$$X = -\frac{1}{\lambda} \ln(U) \ ;$$

F_X est la fonction de répartition de X et f_X sa densité de probabilité.
1. Rappeler la fonction de répartition $F_U(x) = P(U \leq x)$, $x \in \mathbb{R}$, de la variable aléatoire U.
2. Déterminer la fonction de répartition F_X et la densité de probabilité de la variable aléatoire X.
3. Quelle est la loi de X ? Donner les valeurs de $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{V}(X)$. On rappelle que

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = n! \ .$$

Exercice 65 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{2}{\pi\sqrt{(1-x^2)}} \text{ si } 0 < x < 1, 0 \text{ sinon.}$$

Montrer que f est une densité sur $\mathbb{R}$. Soit X une variable admettant f comme densité. Calculer l' espérance $\mathbb{E}(X)$ et et la variance $var(X)$.

Exercice 66 Soit X une variable uniforme sur $[-1, 1]$. Donner la densité $f_Y(y)$ de Y. Déterminer l' espérance et la variance de $Y = X^2$ à partir de la densité f_Y de Y et à partir de la densité f_X de X.

Exercice 67 Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \text{ si } x > 0; 0 \text{ si } x \leq 0.$$

Montrer que f est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.
Soit X une variable admettant pour densité f.
Calculer $\mathbb{E}[X]$, $Var(X)$
Déterminer la loi de la variable $Y = \ln X$.

Exercice 68 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{a}{\pi}\frac{1}{a^2 + x^2}$$

Montrer que f est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$. Que dire de son espérance et variance ?

Exercice 69 Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre λ. On désigne par $[.]$ la fonction partie entière.
1) On pose $Y = [X]$. Donner la loi de Y, son espérance et sa variance.
2) Soit Z l'entier le plus proche de Y, donner la loi de Z.

Exercice 70 Soit X une variable aléatoire de loi normale centrée réduite. On note $Y = \frac{X^2}{2}$. Déterminer la fonction de répartition de Y et sa densité.

Exercice 71 Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes de densités respectives f et g et de fonctions de répartition respectives F et G. Donner les densités de $U = \max(X, Y)$ et $V = \min(X, Y)$.

Exercice 72 1) Soit $(X_1, ..., X_n)$, n variables indépendantes identiquement distribuées. Déterminer la fonction de répartition de $\min(X_1, ..., X_n)$. En supposant que la loi de X_1 est une densité, exprimer la densité de $\min(X_1, ..., X_n)$.
2) Qu'obtient-on lorsque les variables sont de loi exponentielle ?

Exercice 73 Soit X une variable aléatoire à densité. Soit g une fonction C^1 croissante de limite nulle en l'infini. Montrer que

$$\mathbb{E}[g(X)] = g(0) + \int_0^\infty g'(t)\mathbb{P}[X > t]dt$$

Exercice 74 Une variable aléatoire X suit une loi normale $\mathcal{N}(m(\lambda), 1)$ où λ est un paramètre prenant les valeurs $0, 1, 2$ avec les probabilités

$$P(\lambda = 0) = a \quad P(\lambda = 1) = 1 - 2a \quad P(\lambda = 2) = a \; .$$

La moyenne de X est donnée par $m(\lambda) = \lambda - 1$.

1. Quelles sont les conditions sur a pour que le support de P soit $\{0, 1, 2\}$?

2. Z suit une loi normale centrée réduite. Soit $x_\beta \in \mathbb{R}^+$, le réel tel que

$$\beta = P(Z > x_\beta) \; .$$

Déterminer en fonction de β les probabilités

$$P(Z < x_\beta) \; , \quad P(Z < -x_\beta) \; , \quad P(|Z| < x_\beta) \; .$$

3. La table de la loi gaussienne centrée réduite donne les valeurs β associées aux x_β.

$$x_\beta = 0 \; , \quad \beta = 0,5$$

$$x_\beta = 1 \; , \quad \beta = 0,159$$

$$x_\beta = 2 \; , \quad \beta = 0,023$$

Calculer, en fonction de a, la probabilité $P(-1 < X < 1)$.

Exercice 75 (Taux de panne) 1) On suppose que la durée de vie d'un composant électronique est une variable aléatoire X de densité f continue, strictement positive sur $\mathbb{R}_+^\star$ et nulle sur $\mathbb{R}_-$. On note F la fonction de répartition de X.

a) On désigne par t et h deux réels strictement positifs. Exprimer à l'aide de la fonction F la probabilité que le composant tombe en panne avant l'instant $t+h$ sachant qu'il fonctionnait à l'instant t. On appelle cette quantité $p(t, h)$.

b) Etablir que lorsque h est au voisinage de 0, alors $p(t, h) \sim \frac{f(t)}{1-F(t)} h$.

c) On définit

$$\lambda_X : t \mapsto \frac{f(t)}{1 - F(t)} .$$

La fonction λ_X est appelée fonction "taux de panne". Calculer pour tout $t > 0$, $\int_0^t \lambda_X(u) du$. Déterminer une expression de la fonction de répartition F de X en fonction de λ_X.

d) Montrer que la fonction "taux de panne" est constante si et seulement si la variable X suit une loi exponentielle, c'est à dire de densité $f(x) = \mu e^{-\mu x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^\star}$.

2) On suppose que l'unité de mesure est l'année. Soit X une variable aléatoire avec taux de panne $\lambda_X(t) = t^3$.

e) Quelle est la probabilité que l'appareil de taux de panne X survive plus d'un an ?

f) Quelle est la probabilité que cet appareil, âgé d'un an, survive plus de deux ans ?

Exercice 76 Soit X une variable aléatoire de densité

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ e^{-x} \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

On note $Y = e^{X/2}$.

1. Montrer que la densité de Y est donnée par

$$g(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 1 \\ \frac{2}{x^3} \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$$

2. Calculer l'espérance de Y.

Exercice 77 Soit X une variable aléatoire de densité

$$f(x) = \begin{cases} ax \text{ si } x \in [0,1] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

avec a un paramètre strictement positif. On note $Y = \sqrt{X}$.

1. Trouver la valeur de a.
2. Montrer que la densité de Y est donnée par

$$g(x) = \begin{cases} 4x^3 \text{ si } x \in [0,1] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

3. Calculer l'espérance de Y.

Exercice 78 Une usine fabrique des billes de diamètre nominal 8mm. Les erreurs d'usinage provoquent une variation du diamètre qui suit en réalité une variable aléatoire $N(8, 0, 015)$. Lors du contrôle de qualité on met au rebut les billes qui passent dans une bague de 7,98 mm de diamètre et celles qui ne passent pas à travers une bague de 8,02 mm de diamètre. Quelle est la proportion de billes rejetées ?

Exercice 79 On suppose que la température (moyenne) du mois de janvier à Bordeaux suit une loi normale de moyenne 3,7 degrés et d'écart type 1,8 degrés. On suppose que les températures des mois de janvier à Bordeaux de différentes années sont indépendantes.
- Quelle est la loi de la moyenne des températures sur 5 années consécutives ?
- Quelle est la probabilité que cette moyenne sur 5 ans dépasse 5 degrés ?
- Quelle est la probabilité que 5 années de suite la température dépasse 5 degrés ? Quelle est la probabilité que sur 20 années la température ne dépasse jamais 5 degrés ?

Exercice 80 La durée de vie d'une ampoule suit une loi normale de moyenne m et d'écart-type 40. On considère une ampoule défectueuse lorsque sa durée de vie est inférieure à 90 heures.
1) On suppose $m = 160$. Calculer la probabilité d'avoir une durée de vie supérieure à 190 heures, la probabilité d'avoir une durée de vie comprise entre 140 et 180 heures, la probabilité qu'une ampoule soit défectueuse.

2) Déterminer la plus petite valeur de m pour que la probabilité que l'ampoule soit défectueuse soit au plus égale à 0.1

3) On suppose à nouveau $m = 160$. On prélève 6 ampoules dans la production. Calculer la probabilité qu'une ampoule au moins soit défectueuse, que le nombre d'ampoules défectueuses soit compris entre 2 et 4.
4) On suppose toujours $m = 160$ mais on prélève 1000 ampoules. Quelle est la probabilité d'avoir au plus 35 ampoules défectueuses ?

Exercice 81 On dit qu'une variable aléatoire Z suit une loi $\Gamma(\lambda, n)$, où $n \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in \mathbb{R}^+$, si Z a pour densité de probabilités la fonction :

$$f_Z(z) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} z^{n-1} e^{-\lambda z} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(z)$$

1) Vérifier que la loi $\Gamma(\lambda, n)$ est bien définie, puis calculer $E[Z]$, $E[Z^2]$ et $V[Z]$.
2) Soient X et Y deux variables aléatoires statistiquement indépendantes de lois respectives $\Gamma(\lambda, m)$ et $\Gamma(\lambda, n)$. Déterminer la loi jointe du couple (U, V) défini par :

$$U = X + Y \ , \quad V = \frac{X}{X+Y}$$

3) Déterminer les lois marginales de U et V ; ces variables sont-elles indépendantes ?

On donne :

$$\int_0^1 t^{m-1} (1-t)^{n-1} \, dt = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

où $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} \, dt$.