# TD 5: Intégrales

Rappel de cours :
Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, soit $\phi$ une fonction définie sur $[\alpha, \beta]$ admettant une dérivée continue $\phi(\alpha) = a$ et $\phi(\beta) = b$.
Changement de variable $x = \phi(t)$ :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\phi(t)]\phi'(t)dt.$$

La nouvelle intégrale définie portant sur la variable $t$ s'obtient en remplaçant dans la première les bornes $a$ et $b$ par $\alpha$ et $\beta$, puis dans le symbole $f(x)dx$, $f(x)$ par $f[\phi(t)]$ et $dx$ par $\phi'(t)dt$

**Exercice 1** L'objectif est de calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}, J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx, K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}dx$$

1) Soit $f$ la fonction définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$. Calculer sa dérivée, en déduire $I$.
2) Calcul de $J$ et de $K$.
   a) Montrer que $J + 2I = K$.
   b) A l'aide d'une intégration par parties portant sur $K$, montrer que $K = \sqrt{3} - J$
   c) En déduire les valeurs de $J$ et de $K$.

**Exercice 2** 1) Démontrer que $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (question traitée dans le cours).
2) Soit $I_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^2}$, montrer que $(I_n)_{n\geq 1}$ converge et calculer sa limite. Que représente cette limite ?
3) Calculer à l'aide d'un primitive de $x^2$, l'intégrale $\int_0^1 x^2dx$.

**Exercice 3** Utiliser la définition de l'intégrale pour montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par : $u_n = \frac{1}{n}(1 + \cos\frac{a}{n} + \cos\frac{2a}{n} + ... + \cos\frac{(n-1)a}{n})$, converge vers $\frac{\sin a}{a}$.

**Exercice 4** 1) Calculer $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.
2) Calculer $I = \int_0^{1/2} \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$ avec le changement de variable $1 - x^2 = t$.
3) Démontrer que $I = \frac{1}{2}\arcsin(1/2) - \int_0^{1/2} \arcsin(x)dx$. Retrouver le résultat précédent en faisant un changement de variable dans $\int_0^{1/2} \arcsin(x)dx$.
4) Soit $b \geq a > 0$, calculer $J = \int_a^b \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$ en posant $t = x^2 + 1$. Donner une primitive de $x \to \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

**Exercice 5** 1) Déterminer une primitive de $\sin^2$ à l'aide de la formule trigonométrique (à connaître) :

$$\sin^2(t) = \frac{1 - \cos(2t)}{2}.$$

2) Soit $a > 0$, on cherche à calculer $I = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx$.
En effectuant le changement de variable défini par $x = a\cos(t)$ pour $t \in [0, \pi/2]$, montrer que

$$I = a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^2(t)dt.$$

Justifier bien le changement de variable (attention aux bornes).
3) Déterminer la valeur de $I$.

**Exercice 6** Calculs :

1) $\int_0^y \frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}}dx$

2) $\int_0^y \frac{x+3}{x+1}dx$

3) $\int_0^y \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$ (on posera $x = 2\sin^2 u$)

**Exercice 7** Soit $f$ une fonction définie et continue sur $[-r, r]$. Montrer que :
1) Si cette fonction est paire, $\int_{-r}^r f(x)dx = 2\int_0^r f(x)dx$.
2) Si cette fonction est impaire, $\int_{-r}^r f(x)dx = 0$
3) Calculer les intégrales :
$\int_0^{2\pi} |\cos x|dx$ ; $\int_{-1}^2 |\cos x|dx$ ; $\int_{-1}^1 x|x|dx$.

**Exercice 8** Calculer :
– $I = \int_0^{2\pi}(a\cos x + b\sin x)dx$ ;
– $J = \int_0^{2\pi}(a\cos^2 x + b\sin x\cos x + c\sin^2 x)dx$ ;

**Exercice 9** On considère la fonction $f$ définie par $f(x) = \int_0^x \sqrt{\cos 2t}dt$, avec $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$.
a) En utilisant un changement de variable, montrer que $f$ est une fonction impaire.
b) Montrer que si $0 \leq x \leq \pi/4, f(x) \leq x$.

**Exercice 10** Calculer les intégrales suivantes :

1) a) $\int_{-1}^1(x^2 - 1)dx$, b) $\int_0^4 \frac{xdx}{\sqrt{1+3x^2}}$, c) $\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2}dx$, d) $\int_0^1 x^2\sqrt{1+x^3}dx$, e) $\int_0^{\pi/2} x\cos x dx$, f) $\int_0^1 \arcsin x dx$
2) Démontrer que $\int_0^1 \arcsin(x)dx = \frac{\pi}{2} - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$, déduire de f), la valeur de $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

**Exercice 11** 1) Calculer $I_n = \int_0^1 x^n dx$, quelle est la limite de $nI_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$ ?
2) Calculer $J_n = \int_0^1 x^n(1 - x^n)dx$, quelle est la limite de $nJ_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$ ?

**Exercice 12** $p$ et $q$ étant des entiers positifs, calculer les intégrales :
$I = \int_0^{2\pi} \cos(px)\cos(qx)dx$ ; $J = \int_0^{2\pi} \cos(px)\sin(qx)dx$ ; $K = \int_0^{2\pi} \sin(px)\sin(qx)dx$.

**Exercice 13** Calculer l'intégrale : $\int_0^{\pi/2} x^2\sin(x)dx$

**Exercice 14** $f$ est définie et continue sur $[a,b]$, et vérifie :

$$f(a+b-x)=f(x),$$

pour tout $x\in[a,b]$.
1) Que peut on dire du graphe de $f$ ?
2) A l'aide d'un changement de variable simple, montrer que

$$\int_a^b xf(x)dx=\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx.$$

3) Appliquer ce qui précède au calcul de $I=\int_0^\pi \frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)}dx$, et en déduire que I=$\pi^2/4$

**Exercice 15** $f$ étant une fonction continue, montrer que $x\to\int_x^{x^2+1}f(t)dt$ est une fonction dérivable et calculer sa dérivée

**Exercice 16** Déterminer les fonctions continues $f$ telles que la fonction $F(x)=\int_{x-1}^{x+1}f(t)dt$ soit constante.

**Exercice 17** $f$ étant continue sur $[a,b]$, démontrer que :

$$\forall\alpha,\beta\in[a,b]\int_\alpha^\beta f(x)dx=0\Longleftrightarrow\forall x\in[a,b],f(x)=0$$

**Exercice 18** $f$ étant une fonction continue **positive** sur $[a,b]$, démontrer que $\int_a^b f(x)dx=0\Longleftrightarrow\forall x\in[a,b],f(x)=0$

**Exercice 19** On considère l'intégrale $I_n=\int_{-1}^1(x^2-1)^n dx$.
a) A l'aide d'une intégration par parties, démontrer la formule de récurrence : $I_n=-\frac{2n}{2n+1}I_{n-1}$
b) En déduire la valeur de $I_n$

**Exercice 20** Soit $f$ continue et positive sur $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On pose $M=\sup\{f(x);x\in[a,b]\}$.
1) Montrer que $(\int_a^b f(x)^n dx)^{1/n}\le M(b-a)^{\frac{1}{n}}$.
2) Montrer que pour tout $\epsilon\in]0,M]$, il existe $\eta>0$ tel que pour tout $n\in\mathbb{N}$ :

$$\int_a^b f(x)^n dx\ge 2\eta(M-\epsilon)^n.$$

3) En déduire que $(\int_a^b f(x)^n dx)^{1/n}\underset{n\to\infty}{\to}M$

**Exercice 21** Soit $b\ge a>0$, calculer $I=\int_a^b\tan(x)dx$. Donner une primitive de tan

**Exercice 22** Soit $f$ continue sur $[a,b]$, avec $a<b$. Montrer qu'il existe $c$ dans $]a,b[$ tel que :

$$f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Indication : Etudier $\phi(x)=f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$

**Exercice 23** Soit $f$ continue sur $[a, b]$
Montrer que si $|\int_a^b f(x)dx| = \int_a^b |f(x)|dx$ alors $f$ garde un signe constant sur $[a, b]$.

**Exercice 24** Une intégrale issue d'une annale :
L'objectif est de donner une valeur de

$$I = \int_0^{1/2} \frac{e^{-t}}{1-t} dt.$$

1) Justifier l'existence de $I$.
2) Calculer l'intégrale $J = \int_0^{1/2} e^{-t}(1+t)$.
3) a) Montrer que, pour tout $t \neq 1$,

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + \frac{t^2}{1-t}.$$

b) Montrer que pour tout $t \in [0, 1/2]$, on a :

$$t^2 \leq \frac{e^{-t}}{1-t} - e^{-t}(1+t) \leq 2\frac{t^2}{\sqrt{e}}.$$

c) En déduire un encadrement de $I$.

**Exercice 25** Soit $f$ une fonction continue de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ telle que $f(1) = 0$.

1) Montrer que $\lim_{n\to\infty} n \int_0^1 x^n f(x)dx = 0$.

2) En déduire que $\int_0^1 f(x^{1/n})x^{1/n}dx \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

**Exercice 26** Soit $f$ une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$.
1) Montrer que pour tout $c \in [a, b[$, $\frac{1}{h}\int_c^{c+h} f(t)dt$ a une limite quand $h$ tend vers 0, calculer cette limite.
2) On définit la fonction $F$ par :

$$F(x) = \int_a^b f(x+t)cos(t)dt$$

Montrer que $F$ est dérivable et calculer sa dérivée.

**Exercice 27** Propriété de Riemann-Lebesgue
Soit $f$ une fonction continue, démontrer que la suite définie par $u_n := \int_a^b f(t)\sin(nt)dt$ tend vers 0 quand $n$ tend vers $\infty$

**Exercice 28** Soit $f$ une fonction telle que $f(x) \underset{x\to\infty}{\to} l$ pour un certain réel $l$.
Démontrer que $\frac{1}{n}\int_0^n f(x)dx \to l$.

**Exercice 29** On définit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ par :

$$u_n = \int_0^{\pi/2} sin^n(x)dx.$$

Montrer que $(u_n)$ converge vers 0.

**Exercice 30** Prolongement par continuité
Soit $f$ une fonction continue sur $[a, b]$. Soit $z \in ]a, b[$. On définit la fonction suivante :

$$F_z : x \to \frac{1}{2x} \int_{x-z}^{x+z} f(t)dt$$

1) Donner le domaine de définition de $F_z$.

2) Montrer que $F_z(x) - f(z) = \frac{1}{2x} \int_{x-z}^{x+z} (f(t) - f(z))dt$.

3) Montrer que $F_z(x) \underset{x \to 0}{\to} f(z)$.

4) Déterminer une fonction continue $G_z$ de $[0, \min(b - z, z - a)]$, telle que $G_z(x) = F_z(x)$ pour tout $x$ dans le domaine de définition de $F_z$.

**Exercice 31** Soit $f$ une fonction continue sur $[0, 1]$. On définit $F$ sur $[0, 1]$ par :

$$F(x) = \int_0^1 \min(x, t) f(t)dt$$

1) Montrer que $F$ est $C^2$

2) Calculer $F''$, en déduire que :

$$\forall x \in [0, 1], F(x) = \int_0^x \left( \int_u^1 f(t)dt \right) du.$$