TD 4: Continuité

On rappelle la définition de la continuité en un point :
Soit f une fonction définie sur I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $x_0 \in I$. f est continue en x_0 si et seulement si $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0; \forall x \in I : |x - x_0| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon$.

Une fonction est continue sur I, si elle est continue en tout point de I.

Critère séquentiel : soit $x \in I$, f est continue au point x si et seulement si pour toute suite réelle $(x_n)_{n\geq 1}$ convergente vers x, $(f(x_n))_{n\geq 1}$ converge vers $f(x)$.

Attention : f continue **n'implique pas** f dérivable.

Exercice 1 On note $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ respectivement l'ensemble des fonctions continues et des fonctions dérivables sur I.

1) Démontrer que $\mathcal{D}(I, \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$.
   On considére maintenant la fonction valeur absolue $f : x \to |x|$:
2) Justifier que f est continue sur tout $\mathbb{R}$.
3) Montrer que f n'est pas dérivable en 0.
4) Determiner un intervalle I tel que $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}) \not\subset \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$

Exercice 2 Soit f une fonction croissante telle que la suite $(f(n))_{n\geq 1}$ diverge vers $+\infty$. Montrer que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$

Exercice 3 Démontrer l'équivalence suivante :
f est continue en $x \Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0; f([x - \delta, x + \delta]) \subset [f(x) - \epsilon, f(x) + \epsilon]$

Exercice 4 Etudier les limites suivantes :
1 $\frac{x^3+x^2+5}{5x^3-x^2+2}$ en $+\infty$
2 $\frac{sin(ax)}{x}$ en 0, avec a un réel non nul fixé.
3 $\frac{tan(5x)}{sinx}$ en 0
4 $\frac{sin(x^2)}{x}$ en ∞ et en 0.
5 $\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ en 0.
6 $\frac{\ln(x)}{x}$ en $+\infty$.
7 $x\ln(x)$ en 0.
8 $\frac{x-\sqrt{x}}{x+\ln(x)}$ en $+\infty$.
9 $\ln(x)\ln(\ln(x))$ en 1.

Exercice 5 Etudier les limites en 0 des fonctions suivantes :
$f : x \to E(\frac{1}{x})$, $g : x \to xE(\frac{1}{x})$, $h : x \to x^2E(\frac{1}{x})$.

Exercice 6 Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ telle que $f(0)=f(1)$.
Soit g la fonction définie par :

$$g(x)=\begin{cases} f(2x) & si \quad x\in[0,\frac{1}{2}[\\ f(2x-1) & si \quad x\in[\frac{1}{2},1] \end{cases}$$

Montrer que g est continue.

Exercice 7 Soit f une fonction continue en 0 telle que :

$$\forall x\in\mathbb{R}, f(2x)=f(x).$$

1) Montrer que $f(x)=f(\frac{x}{2^k})$ pour tout $k\in\mathbb{N}$.

2) En déduire que $f(x)=f(0)$ pour tout x.

Exercice 8 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que : $f(0)=1, f(4)=3$.
On note $\mathcal{E}$, l'équation : $f(x)=2$.
- Dans chacun des cas suivants, que peut on dire du nombre de solutions de $\mathcal{E}$ dans $[0,4]$.
  a) f est continue et strictement croissante :
  b) f est strictement croissante ;
  c) f est continue ;
- Montrer que si f est continue et croissante alors $\mathcal{E}$ admet dans $[0,4]$ une seule solution ou une infinité de solutions.

Exercice 9 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x\in I, f(x)^2=1$$

Montrer que f est constante égale à 1 ou -1.

Exercice 10 Soit f une fonction continue, soit I un intervalle borné stable par f : $f(I)\subset I$. Montrer que f admet au moins un point fixe.

Exercice 11 Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Q}$, montrer que f est constante.

Exercice 12 Soient f et g deux fonctions continues telles que $f(0)>g(0)$ et $f(1)<g(1)$, montrer qu'il existe $a\in[0,1]$ tel que $f(a)=g(a)$. (Considérer la fonction $h=f-g$)

Exercice 13 Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $[0,1]$.
1) Justifier qu'il existe a, b tels que $0\le a\le b\le 1$ et $f([0,1])=[a,b]$. Que dire de f si $a=b$?
2) Montrer l'équivalence suivante $f\circ f=f \iff f_{|f([0,1])}=Id$
3) Montrer que si $a>0$ alors f n'est pas dérivable en a. De même montrer que si $b<1$ alors f n'est pas dérivable en b. Indication : représenter l'allure de f et étudier les dérivées à droite et à gauche.
4) On suppose $a\neq b$. Déduire de la question 3) que si $0<a$ ou $b<1$ alors f n'est pas dérivable sur $[0,1]$. Donner l'ensemble des fonctions dérivables sur $[0,1]$ telles que $f\circ f=f$.

Exercice 14 Soit la fonction f définie par :

$$f : x \to \sin(\tfrac{1}{x}) \text{ pour } x \neq 0,\ f(0) = 0$$

1. Trouver une suite réelle $(x_n)_{n\geq 1}$ telle que : $x_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$ et $f(x_n) = (-1)^n$
2. Montrer que f n'est pas continue en 0

Exercice 15 Soient f et g deux fonctions continues, on note $\max(f,g)$, la fonction : $x \mapsto \max(f(x), g(x))$ et $\min(f,g)$, la fonction : $x \mapsto \min(f(x), g(x))$.
1) Démontrer que $max(f,g) = \frac{f+g+|f-g|}{2}$
2) Démontrer que $min(f,g) = \frac{f+g-|f-g|}{2}$
3) Démontrer que $max(f,g)$ et $min(f,g)$ sont continues
4) Démontrer que $max(f,g)$ et $min(f,g)$ sont continues sans utiliser 1 et 2.

Exercice 16 Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}^+, y \in \mathbb{R}^+\ f(x+y) = f(x) + f(y)$ (*).
1) Montrer que $f(0) = 0$, et que f est une fonction impaire.
2) Montrer par récurrence : $\forall p \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(px) = pf(x)$.
3) Montrer que $\forall q \in \mathbb{N}^\star$, $f(\frac{1}{q}) = \frac{1}{q}f(1)$.
4) Montrer que $\forall x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = f(1)x$.
5) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(1)x$
6) Déterminer l'ensemble des fonctions continues vérifiant (*)
7) Soit f une fonction continue strictement positive vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, y \in \mathbb{R}^+, f(x+y) = f(x)f(y).$$

Montrer qu'il existe $\alpha > 0$, tel que $f(x) = e^{\alpha x}$.

Exercice 17 Formule de la moyenne et primitive d'une fonction continue :

Attention, dans cet exercice, il s'agit de (re)démontrer des résultats de cours, on n'utilisera donc pas les théorèmes du cours sur l'intégration (qui seront vus dans le dernier chapitre), mais seulement des connaissances de terminale sur l'intégrale et le chapitre de la continuité du lm115.
Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soit un segment $[a,b]$ inclus dans I. On rappelle le résultat de cours suivant (à connaitre) :
Une fonction continue sur un segment $[a,b]$ admet un minimum (que l'on note $\min\limits_{[a,b]} f$) et un maximum (que l'on note $\max\limits_{[a,b]} f$).

1) Justifier que $f([a,b]) = [\min\limits_{[a,b]} f, \max\limits_{[a,b]} f]$
2) Montrer que :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \in [\min_{[a,b]} f, \max_{[a,b]} f].$$

En déduire qu'il existe $c \in [a,b]$, tel que $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$. (Formule de la moyenne)
3) Soit la fonction

$$F : x \in [a,b] \to \int_a^x f(t)dt.$$

Déterminer un réel $M \geq 0$ tel que :

$$\forall (x,y) \in [a,b]^2, |F(x) - F(y)| \leq M|x-y|.$$

4) Donner la définition (quantifiée) d'une fonction continue sur I.
5) Montrer que F est continue.
6) On dit qu'une fonction f est **uniformément continue** sur I si elle vérifie la propriété suivante :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0; \forall (x,y) \in I^2, |x-y| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon$$

F est elle uniformément continue sur $[a,b]$?

7) Soit $h > 0$, tel que $x+h \leq b$. Montrer qu'il existe $\theta \in [0,1]$ tel que $\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt = f(x+h\theta)$

8) En déduire que F est dérivable pour tout $x \in [a,b]$, déterminer sa dérivée.

Exercice 18 Soit f une fonction continue. On appelle période de f, un réel a tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+a) = f(x)$. On note $\mathcal{P}$, l'ensemble des périodes :
1) Montrer que $\mathcal{P}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.
On rappelle qu'on a démontré dans un exercice précédent, que tout sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ est soit de la forme $a\mathbb{Z}$, soit dense dans $\mathbb{R}$.

2) On suppose que f est continue non constante et possède une période non nulle : montrer que l'ensemble des périodes est de la forme $a\mathbb{Z}$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$.
3) On suppose que f a pour période 1 et $\sqrt{2}$, démontrer que f est constante.

4) Soit f une fonction périodique qui admet une limite en $+\infty$, montrer que f est constante. (Cette question est indépendante des 3 premières)

Exercice 19 Soit f une fonction réelle non nulle définie sur $\mathbb{R}^+$ dérivable en 1, telle que $f(xy) = f(x)f(y)$.
1) Démontrer que $f(1) = 1$
2) Soit $x_0 \in \mathbb{R}^*$ et $h \in \mathbb{R}$ telle que $x_0 + h > 0$, démontrer que $f(x_0+h) - f(x_0) = f(x_0)[f(1+\frac{h}{x_0}) - f(1)]$
3) Démontrer que f est dérivable en tout point de R_+^* et que l'on a : $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{f'(1)}{x}$, pour tout $x > 0$. Déterminer f.

Exercice 20 Exemples de fonctions discontinues.
1 On considère la fonction f définie sur $]0,1[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & si \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Montrer que f est discontinue en tout point.
2) on considère la fonction g définie sur $]0,1[$ par :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & si \quad x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}; p \wedge q = 1 \\ 0 & si \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

a) Soit $\epsilon > 0$, montrer que $\mathcal{N}_\epsilon = \{x \in \mathbb{Q} \cap]0,1[, g(x) \geq \epsilon\}$ est un ensemble fini.
b) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, on pose $\delta = \frac{1}{2}\min_{y \in \mathcal{N}_\epsilon}(|y-x|)$. Soit $y \in \mathbb{Q}$ tel que $|x-y| \leq \delta$, que vérifie y ?
c) En déduire que g est continue en x.

d) On considère une suite de rationnels $(r_n)_{n\geq 1} = (\frac{p_n}{q_n})_{n\geq 1}$ qui converge vers un irrationnel $x \in]0,1[$. Montrer en utilisant la question 2b que $q_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$.

e) Montrer que g n'est continue en aucun rationnel.
Autre méthode : l'exercice 32 du td 3, nous dit que si $\frac{p_n}{q_n} \to x \notin \mathbb{Q}$, alors $q_n \to \infty$. En déduire la continuité de g aux points irrationnels.

3) On considère la fonction h définie sur $]0,1[$ par :

$$h(x) = \begin{cases} \frac{pq}{p^2+q^2+2q} & si \quad x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}; p \wedge q = 1 \\ \frac{x}{1+x^2} & si \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

1) Déterminer α tel que $\frac{pq}{p^2+q^2+2q} = \frac{\frac{p}{q}}{1+\frac{p^2}{q^2}+\alpha}$

2) Montrer par le critère séquentiel que h est continue en tout point irrationnel de $]0,1[$.

3) Montrer que h n'est continue en aucun rationnel de $]0,1[$

Exercice 21 Suite de fonctions :
Pour $x \in [0,1]$, et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$f_n(x) = \frac{1-x^n}{1+x^{2n}}.$$

1) Les fonctions f_n sont elles continues ?
2) Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, la suite réelle $(f_n(x))$ converge et déterminer sa limite (qui dépend de x)
On note $f(x)$ la limite de $f_n(x)$ quand $n \to \infty$. (On dit que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers f)
3) La fonction f est elle continue ?
4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction g_n par $g_n(x) = f_n(x) - f(x)$. On note $M_n := \{g_n(x), x \in [0,1]\}$, justifier l'existence du réel $S_n := \sup M_n$.

5) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = 1$.

Exercice 22 Suites de fonctions :
Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = (1/n)\sin(n\pi x)$
1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite réelle $(f_n(x))_{n\geq 0}$ admet une limite. Déterminer cette limite.
2) Soit $M_n = \{f_n(x); x \in \mathbb{R}\}$, Justifier l'existence de $S_n = \sup M_n$.
3) Montrer que (S_n) converge vers 0

Exercice 23 Fonction continue nulle part
Pour $x \in \mathbb{R}$, et $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = \lim\limits_{m\to\infty} [\cos(n!\pi x)]^{2m}$.
1) Démontrer que f_n est bien définie (que la limite existe bien).
2) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{Q}$, il existe n_0 tel que $sin \geq n_0$, $f_n(x) = 1$.
3) Démontrer que si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $f_n(x) \to 0$.
4) Déterminer une expression simple de la fonction f vérifiant :
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$

Problème à rédiger

L'objectif est d'étudier la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$u_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \text{ et pour tout } n \geq 1,\ u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}$$

Partie 1

1) Soit f la fonction réelle définie sur $[0, 1]$ par

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}).$$

Justifier que f est dérivable, calculer sa dérivée et déterminer u_0.

2) Calculer u_1

3) Sans chercher à calculer u_n, montrer que la suite (u_n) est décroissante. En déduire qu'elle est convergente.

4) Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$,

$$1 \leq \sqrt{1 + x^2} \leq \sqrt{2}.$$

En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}. \quad (1)$$

Déterminer la limite de la suite (u_n).

Partie 2

Pour tout entier $n \geq 3$, on pose :

$$I_n = \int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1 = x^2}dx$$

5) Verifier que pour tout entier $n \geq 3$, on a :

$$u_n + u_{n-2} = I_n.$$

Par une intégration par parties portant sur I_n, montrer que pour tout entier $n \geq 3$, on a :

$$nu_n + (n-1)u_{n-1} = \sqrt{2}.$$

6) En déduire que pour tout entier $n \geq 3$, on a :

$$(2n-1)u_n \leq \sqrt{2}. \quad (2)$$

7) A l'aide des inégalités (1) et (2), montrer que la suite (nu_n) est convergente et calculer sa limite.