Université Pierre et Marie Curie Année 2011/2012

LM115 MIME

TD 3: Suites réelles

Convergence des suites : Par définition, une suite (u_n) converge vers un réel l si :
Pour tout ϵ réel strictement positif, il existe un rang n_0 à partir duquel, $|u_n - l|$ est plus petit que le réel ϵ.
Avec les quantificateurs :

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}; \forall n \geq n_0, |u_n - l| \leq \epsilon$$

Divergence vers $+\infty$:
C'est un cas trés particulier de divergence ! Une suite qui diverge peut a priori être bornée...(exemple ?)
Par définition, une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ tend vers $+\infty$ si pour tout réel $A > 0$, il existe un rang à partir duquel, u_n est supérieur à A.
Avec les quantificateurs :

$$\forall A > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}; \forall n \geq n_0, u_n \geq A$$

1 Convergence de suites

Exercice 1 Déterminer si les suites suivantes convergent (si possible préciser la limite) :
$(-1)^n$, $\frac{a^n}{n!}$ avec $a > 0$, $\frac{n!}{n^n}$, $(\frac{1}{2}+1)^n$, $(2-\frac{1}{n})^n$, $(1+\frac{1}{n})^n$, $n\ln(1+\frac{1}{n})$, $n\sin(\frac{1}{n})$, $(\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k^2})_{n\geq 1}$.

Exercice 2 Montrer qu'une suite convergente à valeurs dans $\mathbb{N}$ est stationnaire (i.e constante à partir d'un certain rang).

Exercice 3 Montrer qu'une suite convergente est bornée.

Exercice 4 Déterminer les limites (si elles existent) des suites suivantes :
$u_n^{(1)} = (1-\frac{1}{n})\ln(\frac{1}{n})$
$u_n^{(2)} = (n+\frac{1}{n})^2 - n^2$
$u_n^{(3)} = \frac{n^3+5n}{5n^3+\cos(n)+\frac{1}{n^2}}$
$u_n^{(4)} = \frac{2n+(-1)^n}{5n+(-1)^{n+1}}$

Exercice 5 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. Donner la signification de :
- $\exists l \in \mathbb{R}$, $\exists \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $n > N \Longrightarrow |u_n - l| < \varepsilon$.
- $\forall l \in \mathbb{R}$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $n > N \Longrightarrow |u_n - l| < \varepsilon$.
- $\exists l \in \mathbb{R}$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n > N \Longrightarrow |u_n - l| < \varepsilon$.
- $\forall \varepsilon > 0$, $\exists l \in \mathbb{R}$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n > N \Longrightarrow |u_n - l| < \varepsilon$.
- $\exists l \in \mathbb{R}$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall \varepsilon > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n > N \Longrightarrow |u_n - l| < \varepsilon$.

Exercice 6 Vrai ou faux ? Justifier

1. Toute suite positive divergente tend vers $+\infty$.
2. Toute suite croissante divergente tend vers $+\infty$.
3. Toute suite divergente vers $+\infty$ est croissante à partir d'un certain rang.
4. Toute suite positive décroissante est convergente de limite nulle.
5. Toute suite positive de limite 0 est décroissante à partir d'un certain rang.
6. Toute suite convergente vers une limite $l > 0$ est positive à partir d'un certain rang.
7. Toute suite bornée est convergente.
8. Toute suite bornée admet une sous-suite convergente.
9. Si $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite divergente alors toute sous-suite de (u_n) diverge
10. La somme de deux suites divergentes diverge.
11. La somme d'une suite convergente et d'une suite divergente diverge.

Exercice 7 Construire une suite u de terme général $u_n = v_n \cdot w_n$ convergente et telle que l'une des suites $(v_n)_n \in \mathbb{N}$ ou $(w_n)_n \in \mathbb{N}$ soit divergente. Même question avec $u_n = v_n + w_n$.

Exercice 8 Soit $\theta > -1$, montrer par récurrence que $(1+\theta)^n \geq 1+n\theta$. Que peut on en déduire pour la limite de la suite (u_n) définie par $u_n = a^n$ avec $a > 1$?

Exercice 9 Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{n+\sqrt{n}}$$

– Ecrire u_n à l'aide du signe $\sum$
– Montrer que pour tout $0 \leq k \leq n$, $\frac{1}{n+\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n+\sqrt{k}} \leq \frac{1}{n}$.
– En déduire que la suite converge et déterminer sa limite.

Exercice 10 Un développement de $\ln(1+x)$ (*) :

1) Montrer par récurrence que pour tout réel positif x et pour tout entier naturel n :

$$\ln(1+x) = x - x^2 + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}dt.$$

2) En majorant $\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}$, montrer que la suite de terme général :

$$u_n = 1 - \frac{1}{2} + ... + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

converge vers $\ln(2)$.

Exercice 11 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que (u_{2n}), (u_{2n+1}), (u_{3n}) convergent. Montrer que (u_n) converge.

Exercice 12 Soit f une application bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad M_n := \sup_{x \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]} f(x) \text{ et } M_n := \inf_{x \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]} f(x)$$

Prouver que ces deux suites sont monotones. Sont-elles convergentes ? Donner un exemple où elles n'ont pas même limite.

Exercice 13 Soit la suite de nombres réels (u_n) définie pour $n \geq 1$, par :

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \frac{1}{2^n}}, u_1 = 1$$

En remarquant que $u_n^2 - u_1^2 = \sum_{k=1}^{n-1}(u_{k+1}^2 - u_k^2)$, montrer que $u_n^2 \underset{n\to\infty}{\to} 2$. En déduire la limite de la suite (u_n)

Exercice 14 Une suite issue d'une annale :
Soit (u_n) la suite définie par la donnée $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 + \frac{(n+2)u_n}{2(n+1)}.$$

1) Calculer u_1, u_2, u_3, u_4
2) Montrer par récurrence que :

$$\forall n \geq 2, u_n \geq 2.$$

3) Montrer que la suite décroit pour $n \geq 4$.
4) En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 15 Théorème de Césàro (**)

1) Soit (v_n) une suite convergente, on note l sa limite. Démontrer que $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n v_k \to l$.
   Indication : Etudier $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n |v_k - l|$.
2) Soit (λ_n) une suite de réels positifs telle que $\sum_{k=1}^n \lambda_k \underset{n\to\infty}{\to} \infty$.
   Démontrer que :

$$\frac{\sum_{k=1}^n \lambda_k v_k}{\sum_{k=1}^n \lambda_k} \to l.$$

3) A t'on l'implication suivante : $\frac{\sum_{k=1}^n v_k}{n} \to l \Longrightarrow v_n \to l$?
4) Montrer que si $v_n \to \infty$, alors $\frac{\sum_{k=1}^n v_k}{n} \to \infty$
5) Si (u_n) est une suite de période p, montrer que $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n u_k \to \frac{u_1+\ldots+u_p}{p}$.
5 Montrer que si $(u_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$, et $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to l$, alors $(u_n^{1/n})$ converge vers l.

Exercice 16 Soit (u_n) et (v_n) deux suites convergentes vers l_1, l_2.
Montrer que $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} \to l_1 l_2$.

Exercice 17 Intégrale de Wallis (**)
Posons pour $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)dt.$$

1) Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et convergente.
2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, $I_n = \frac{n-1}{n-2} I_{n-2}$.
3) Calculer I_{2n} et I_{2n+1}.
4) Démontrer que $\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \underset{n\to\infty}{\to} 1$.
5) En déduire que

$$[\frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...2n}]^2 n \to \frac{1}{\pi},$$

c'est la formule de Wallis.
6) En remarquant que $2.4.6...2n = 2^n n!$, montrer que

$$\frac{\sqrt{n}(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \underset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{\sqrt{\pi}},$$

retrouver ce résultat en utilisant la formule de Stirling.

Exercice 18 Produits et sommes

1) On pose $u_n = \prod_{k=1}^n (1+\frac{1}{k})$, étudier $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Qu'en déduisez vous, pour la suite :

$$v_n = \sum_{k=1}^n \ln(1+\frac{1}{k})?$$

2) On pose $u_n = \prod_{k=1}^n (1-\frac{1}{k})$, étudier $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Qu'en déduisez vous, pour la suite :

$$v_n = \sum_{k=1}^n \ln(1-\frac{1}{k})?$$

3) Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, on définit $P_n(a) = (1+a)(1+a^2)...(1+a^n)$. Etudier selon les valeurs de a la convergence de $(P_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$

Exercice 19 Comparaison séries-intégrales :
Soit f une fonction de $[1,\infty[$ dans $\mathbb{R}^+$, décroissante et de limite nulle à l'infini. On définit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ en posant :

$$u_n = \sum_{i=1}^n f(i).$$

1) Montrer que cette suite est croissante et vérifie : $\int_1^{n+1} f(x)dx \leq u_n \leq f(1) + \int_1^n f(x)dx$
2) Montrer que si $(\int_1^n f(x)dx)_{n\geq 1}$ converge alors $(u_n)_{n\geq 1}$ converge.
3) Démontrer que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n\to\infty}{\to} \infty$
4) Démontrer que $(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2})_{n\geq 1}$ converge.
5) Démontrer que $(\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k})_{n\geq 1}$ converge.

Exercice 20 (**) On considère la suite définie par :

$$u_{n+1} - (n+1)u_n = 2^n (n+1)!$$

et la donnée u_0.

1) Montrer que les suites $(v_n)_{n\geq 0}$ vérifiant :

$$v_{n+1} - (n+1)! v_n = 0$$

sont de la forme $v_n = Cn!$ avec $C = v_0$.
2) Trouver une condition sur la suite $(C(n))_{n\geq 0}$ pour que la suite définie par $w_n = C(n)n!$ vérifie : $u_{n+1} - (n+1)u_n = 2^n(n+1)!$
En déduire le terme général de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$

Exercice 21 Suite de Fibonacci
Soit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ telle que :

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n, \text{ avec } n \geq 1 \text{ et } u_1 = u_2 = 1.$$

1. Quelle est la nature de $(u_n)_{n\geq 1}$?

–

2. Montrer que $u_1 + ... + u_n = u_{n+2} - 1$
3. Démontrer la formule $u_1^2 + ... + u_n^2 = u_n u_{n+1}$

–

On va démontrer que

$$u_n = \frac{[(1+\sqrt{5})/2]^n - [(1-\sqrt{5})/2]^n}{\sqrt{5}},$$

en cherchant les suites satisfaisant à la relation suivante :

$$\text{(R)} : v_{n+2} = v_{n+1} + v_n \text{ pour } n \in \mathbb{N}^* \text{ et } v_n \in \mathbb{R}.$$

4. Montrer que si la suite (v_n) satisfait (R) alors la suite $(v'_n)_{n\geq 1}$ définie par $v'_n = cv_n$ satisfait aussi à (R).
5. Montrer que si (v_n) et (w_n) satisfont à (R) alors la suite (z_n) définie par $z_n = v_n + w_n$ vérifie (R).
6. Trouver toutes les suites vérifiant (R) de terme général $v_n = q^{n-1}$, pour $q \in \mathbb{R}^*$.
   En déduire qu'il existe a et b tels que la suite de terme général $c_1 a^{n-1} + c_2 b^{n-1}$ satisfait à (R) quels que soient les réels c_1, c_2.
7. Montrer que l'on peut trouver c_1 et $c_2 \in \mathbb{R}$ tels que pour tout n,

$$u_n = c_1 a^{n-1} + c_2 b^{n-1}.$$

En déduire ce que l'on cherche.

–

Montrer que deux éléments successifs de la suite de Fibonacci sont premiers entre eux.

–

On va démontrer que la suite de terme général $w_n = u_{n-1}/u_n$, $n \geq 2$ tend vers une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$, limite que l'on calculera.

8. Montrer que la suite (w_{2k}) est décroissante, et que la suite (w_{2k+1}) est croissante, majorée par w_2. Justifier qu'elles convergent.
9. Montrer que $(w_{2k} - w_{2k+1}) \underset{k\to\infty}{\to} 0$. En déduire que

$$\lim w_{2k} = \lim w_{2k+1}$$

Justifier que la suite (w_n) a une limite et calculer la.

Exercice 22 On s'intéresse au comportement des solutions positives de l'équation

$$(E_n) : \sum_{k=1}^n x^k = a,\ a \in [0,1],\ x \in \mathbb{R}^+.$$

On définit la fonction $P_n : x \mapsto \sum_{k=1}^n x^k$.

1. Montrer qu'il existe un unique réel positif x_n tel que : $P_n(x_n) = a$ et démontrer l'équivalence

$$P_n(x) = a \Longleftrightarrow x^{n+1} - (a+1)x + a = 0.$$

Indication : Pour l'existence et l'unicité de x_n, penser au théorème des valeurs intermédiaires.

2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est strictement décroissante. Justifier la convergence de $(x_n)_{n\geq 1}$.

Indication : pour comparer x_{n+1} et x_n, regarder $P_{n+1}(x_n)$.

3. Montrer que $x_n \leq x_2 < 1$ pour $n \geq 2$. En déduire la limite de $(x_n)_{n\geq 1}$.
4. Montrer l'encadrement : $\forall n \geq 2$,

$$\frac{a}{a+1} < x_n < a - \sum_{k=2}^n (\frac{a}{a+1})^k.$$

Démontrer que

$$a - \sum_{k=2}^n (\frac{a}{a+1})^k = a - \frac{a^2}{a+1}(1 - (\frac{a}{a+1})^{n-1}).$$

5. On pose $y_n = x_n - \frac{a}{a+1}$. Démontrer que $(y_n + \frac{a}{a+1})^{n+1} = (a+1)y_n$ et donc que :

$$(1 + \frac{a+1}{a}y_n)^{n+1} = \frac{(a+1)^{n+2}}{a^{n+1}}y_n.$$

6. Montrer que $(1 + \frac{a+1}{a}y_n)^{n+1}$ converge vers 1 quand n tend vers l'infini.

Indication : Passer au logarithme, utiliser l'inégalité $\ln(1+x) \leq x$ (à justifier) et la majoration de la question 4.

7. Déduire de la question précédente que $\frac{(a+1)^{n+2}}{a^{n+1}}y_n \to 1$, comment l'interprétez-vous ?

2 Suites adjacentes

Exercice 23 Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites réelles définies par les relations de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{3u_n+v_n}{4} \text{ et } v_{n+1} = \frac{3v_n+u_n}{4}.$$

De plus, on suppose $u_0 \leq v_0$.
1) Montrer par récurrence que $\forall n \geq 1$, $u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n$.
2) Montrer que $v_n - u_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$. En conclure que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
3) Montrer que $\forall n \geq 0$, $u_n + v_n = u_0 + v_0$. Justifier l'existence des limites de (u_n) et (v_n) et déterminer les.

Exercice 24 Soient (a_n) et (b_n) deux suites définies par :

$$a_0 = a, b_0 = b \text{ et } a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n},\ b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$$

1) Montrer que $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{(\sqrt{a_n}-\sqrt{b_n})^2}{2}$. En déduire que $\forall n \geq 1$, $b_n \geq a_n$.
2) En déduire $a_{n+1} \geq a_n$ et $b_{n+1} \leq b_n$.
3) Montrer que $|b_{n+1} - a_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|b_n - a_n|$.
4) Que dire des suites $(a_n)_{n\geq 1}, (b_n)_{n\geq 1}$?

Exercice 25 Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on définit la suite (u_n) par $u_0 = c$, $u_{n+1} = au_n + b$. Montrer, qu'en dehors d'un cas particulier à préciser, il existe un réel α tel que $u_n - \alpha$ soit une suite géométrique. Déterminer sa raison, et son premier terme, calculer ensuite u_n explicitement (dans tous les cas).

Exercice 26 Considérons deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$, $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$
1) Montrer que (u_n) est décroissante et (v_n) croissante. Indication : utiliser $\ln(\frac{n+1}{n}) = \int_n^{n+1} \frac{dx}{x}$.
2) Montrer que (u_n) converge vers $\gamma \in [1 - \ln(2), 1]$

Exercice 27 Irrationalité de e : On pose $a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $b_n = a_n + \frac{1}{n.n!}$.
1) Montrer que (a_n) converge (déjà montré précédemment), on admet que sa limite est e.
2) Montrer que (a_n) est croissante, (b_n) décroissante, et que $a_n - b_n \to 0$.
3) Supposons par l'absurde que $e = \frac{p}{q}$, avec $p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $a_q < e < b_q$. Trouver une contradiction.

3 Suites récurrentes

Exercice 28 Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 0$, $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$. Justifier que la suite est bien définie.
1 Montrer par récurrence que (u_n) est croissante.
2 Montrer par récurrence que (u_n) est majorée par $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
3 Déterminer sa limite.
On dit que l'intervalle I est stable par f, si $f(I) \subset I$.
Que pensez vous de l'intervalle $I = [0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}]$ pour la fonction $f(x) = \sqrt{1 + x}$. Montrer que si I est stable pour une fonction f, alors la suite définie par $u_0 \in I$, et $u_{n+1} = f(u_n)$ est telle que $\forall n \in \mathbb{N} u_n \in I$.
Redémontrer les résultats de 1,2 directement (i.e sans récurrence).

Exercice 29 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 - 2x + 1)(3x - 1) + x$.
1 Montrer qu'on peut définir une suite en posant : $u_0 \in [\frac{1}{3}, 1]$, et $u_{n+1} = f(u_n)$.
2 Montrer que cette suite est croissante majorée. Déterminer sa limite.
3 On suppose maintenant $u_0 \in]-\infty, \frac{1}{3}]$. Monotonie ? Convergence ? Limite ?

Exercice 30 Soit $(u_n)_{n\geq 1}$, définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.
1) Montrer que (u_n) est bien définie et est croissante.
2) Montrer que (u_n) tend vers l'infini.

Exercice 31 Soit $(u_n)_{n\geq 1}$, définie par $u_0 \in [-30, 6]$ et $u_{n+1} = \sqrt{6 - u_n}$.
1) Montrer que $[-30, 6]$ est stable par $f : x \to \sqrt{6 - x}$. Montrer que (u_n) est bien définie.
2) Montrer que (u_n) tend vers 2.
3) Que dire des suites (u_{2n}), (u_{2n+1}) ?

Exercice 32 Soit $(u_n)_{n\geq 0}$, définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{2}{u_n}$.
1) Justifier que $u_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$.
2) Soit (v_n) la suite définie par $v_n = \frac{u_n^2}{4}$. Montrer que pour tout n entier, $v_{n+1} - v_n \geq 1$, en déduire que $v_n \geq n$.
3) Montrer que $v_{n+1} \leq v_n + 1 + \frac{1}{u_n^2}$. En déduire, $v_{n+1} - v_n \leq 1 + \frac{1}{4n}$ et en utilisant l'inégalité $\frac{1}{n} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t} dt$ montrer que $v_n \leq v_2 + n + \frac{1}{4}\ln(n-1)$.
4) En déduire que $\frac{v_n}{n} \underset{n\to\infty}{\to} 1$.

Exercice 33 Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{x^3}{9} + \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}$, et la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 0 \text{ et } u_{n+1} = f(u_n)$$

- Montrer que l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ possède une unique solution $\alpha \in]0, 1/2[$
- Montrer que l'équation $f(x) = x$ est équivalente à l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ et en déduire que α est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ dans $[0, 1/2]$
- Montrer que $f(\mathbb{R}^+) \subset \mathbb{R}^+$ et que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}^+$. En déduire que la suite (u_n) est croissante.
- Montrer que $f(1/2) < 1/2$ et en déduire que $0 \leq x_n \leq 1/2$ pour tout $n \geq 0$
- Montrer que la suite (u_n) converge vers α.

Exercice 34 Que dire des suites suivantes :
1 $(u_n)_{n\geq 0}$, vérifiant $u_{n+1} = u_n^2 + 1$?
2 $(u_n)_{n\geq 0}$, vérifiant $u_0 \geq 0$, $u_{n+1} = \frac{2u_n + 2}{2 + u_n}$?
3 $(u_n)_{n\geq 0}$, vérifiant $u_0 = 1$, $u_{n+1} = \frac{3}{4}cos(u_n)$?
4 $(u_n)_{n\geq 0}$, vérifiant $u_0 \geq 0$, $u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1$?
5 $(u_n)_{n\geq 0}$, vérifiant $u_0 \geq 1$, $u_n = \sqrt{1 + u_{n-1}}$?

Exercice 35 Soit f une fonction continue, soit a un point fixe de f. On suppose que f est dérivable en a que $|f'(a)| > 1$.
On définit $(u_n)_{n\geq 0}$, par $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 \in I$.
L'objectif est de démontrer que *dans ce cas* la suite ne peut converger vers a que si elle est stationnaire :
1) Montrer que s'il existe n_0 tel que $u_{n_0} = a$, alors la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est constante.

2) Supposons que la suite n'est pas stationnaire, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq a$.
3) Supposons que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers a : En utilisant l'hypothèse sur f', montrer que la suite $(|u_n - a|)_{n\geq 0}$ est croissante à partir d'un certain rang. Trouver une contradiction.

Exercice 36 Soit $A \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + A$. On note (u_n) la suite récurrente définie par :

$$u_0 = 0, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

1) a) Donner le tableau de variation de f.
   b) Donner le tableau de signe de $f - Id$ en distinguant les cas $A > \frac{1}{4}, A = \frac{1}{4}, A < \frac{1}{4}$.
   c) On dit que l'intervalle est stable par f si $f(I) \subset I$. Montrer que si I est stable par f, et $u_0 \in I$; alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$.
2) On suppose $A \geq 0$. Montrer que (u_n) est croissante.
   a) Montrer que si $A > \frac{1}{4}$, alors (u_n) tend vers $+\infty$.
   b) Montrer que si $A \in [0, \frac{1}{4}[$, alors (u_n) est convergente et donner sa limite (utiliser un intervalle stable par f).
3) On suppose $A \in]-1, 0]$.
   a) Montrer que $[A, 0]$ est stable par f.
   b) Montrer que (u_{2n}) est décroissante et converge vers un réel a tel que $f \circ f(a) = a$. Montrer que (u_{2n+1}) est croissante et converge vers b tel que $f \circ f(b) = b$.
   c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f \circ f(x) - x = (x^2 - x + A)(x^2 + x + A + 1)$.
   d) Montrer que si $A \in]-\frac{3}{4}, 0[$, alors (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite. En déduire que (u_n) converge et donner sa limite.
   e) Montrer que si $A \in]-1, -\frac{3}{4}[$, alors (u_n) diverge.

Exercice 37 Suite récurrente d'ordre 2 (**)
Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. On considère l'ensemble des suites u verifiant la relation de récurrence suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$. Ces suites sont à valeurs complexes. On notera $\mathcal{U}$ l'ensemble de ces suites. D'autre part, on notera $\mathcal{R}(a, b)$ l'ensemble des solutions de l'équation du second degré : $r^2 - ar - b = 0$.

1. Montrer que si $(u, v) \in \mathcal{U}$, et $u_0 = v_0, u_1 = v_1$, alors $u = v$.
2. Montrer que si $r \in \mathcal{R}(a, b)$, alors la suite définie par $u_n = r^n$ est un élément de $\mathcal{U}$
3. Montrer que si $u, v \in \mathcal{U}$, et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, alors $\alpha u + \beta v \in \mathcal{U}$. $(\mathcal{U}, +, .)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, quelle est sa dimension ?

4 Applications du théorème de Bolzano-Weierstrass : (**)

Exercice 38 Soit x, un irrationnel.
– (Re)démontrer qu'il existe une suite de rationnels $r_n = \frac{p_n}{q_n}$ qui converge vers x. (Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, voir feuille 2).
– Démontrer qu'une suite qui ne tend pas vers l'infini possède une sous-suite bornée.
– En déduire qu'une suite qui ne tend pas vers l'infini possède une sous-suite convergente.
– Démontrer, par l'absurde, que $q_n \to \infty$ et $|p_n| \to \infty$.

Exercice 39 0) Rappeler la définition d'une suite extraite, montrer par récurrence que si ϕ est strictement croissante sur $\mathbb{N}$, alors $\phi(n) \geq n$.

1) Montrer qu'une suite croissante qui admet une valeur d'adhérence converge.
2) Montrer qu'une suite convergente admet une unique valeur d'adhérence.
3) Montrons qu'une suite bornée qui admet une unique valeur d'adhérence converge : On note a sa valeur d'adhérence. Soit $\epsilon > 0$ fixé. On pose $N_\epsilon := \{n; |u_n - a| > \epsilon\}$. De deux choses l'une, $\#N_\epsilon < \infty$ ou $\#N_\epsilon = \infty$. Conclure en distinguant ces deux cas.
4) Enoncer l'équivalence établie grâce aux questions 2 et 3.
5) Que pensez vous de la suite $u_n = n$ si n pair, $u_n = \frac{1}{n}$, si n impair ? Ensemble des valeurs d'adhérence, convergence ?

Exercice 40 Une suite (s_n) est de Cauchy, si : $\forall \epsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}; \forall p, q \geq n, |s_p - s_q| \leq \epsilon$.
1) Montrer que toute suite convergente est de Cauchy.
2) Montrer que toute suite réelle de Cauchy est bornée.
3) Montrer que toute suite réelle de Cauchy converge.
4) Enoncer les résultats des questions 1 et 3 sous forme d'une équivalence.

Exercice 41 Continuité de la fonction réciproque d'une bijection continue. Soit I, J deux intervalles bornés de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction continue bijective de I dans J. Démontrer que $f^{-1} : J \to I$ est continue (indication : utiliser le critère séquentiel de continuité, le théorème de Bolzano-Weierstrass et la question 4 de l'exercice 7).