# TD 2: Nombres réels

Attention à ne pas confondre la borne supérieure d'une partie $X$ ($\sup X$) et son plus grand élément ($\max X$). La borne supérieure de $X$ est le plus petit majorant de $X$, ce n'est pas forcément un élément de $X$. Néanmoins quand $X$ possède un plus grand élément c'est aussi sa borne supérieure.

**Exercice 1** Donner les relations d'inclusion (lorsqu'elles existent) entre les ensembles suivants : $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

**Exercice 2** L'ensemble $\mathbb{R}_-$ possède t'il un plus grand élément, et $\mathbb{R}_-^*$ ?

**Exercice 3** Que peut on dire d'un nombre réel $x$ vérifiant :
1) $\forall \epsilon > 0, x \leq 10^6 \epsilon$.
2) $\forall \epsilon > 0, -12\epsilon \leq x \leq \epsilon$.
3) $\forall \epsilon > 0, -12 + \epsilon \leq x \leq 1 + \epsilon$.

**Exercice 4** Démontrer les inégalités larges suivantes :
- $\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^2, \sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
- $\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^2, \sqrt{|a-b|} \leq |\sqrt{|a|} - \sqrt{|b|}|$.

**Exercice 5** Soient $a$ et $b$ deux réels strictement positifs, les parties suivantes sont elles majorées, minorées, si oui, quelles leurs bornes inférieures, supérieures ?
$A = [0, 1]$, $A = ]0, 1[$, $A = \bigcup_{n \geq 1} \{1/n\}$, $A = \{1 - 1/n, n \geq 1\}$, $A = \mathbb{N}^*$, $A = \mathbb{Q}^{-*}$ $A = \{\sqrt{2n} - \sqrt{n+2}, n\mathbb{N}^*\}$, $A = \{a + bn; n \in \mathbb{N}\}$, $A = \{a + (-1)^n b; b \in \mathbb{N}\}$, $A = \{(-1)^n a + \frac{b}{n}; n \in \mathbb{N}^*\}$, $A = \{a + \frac{(-1)^n b}{n}; n \in \mathbb{N}^*\}$.

**Exercice 6** Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle. On la suppose croissante. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'ensemble $\{u_n, n \geq 0\}$ ait une borne supérieure.

**Exercice 7** – Enoncer la propriété de borne supérieure pour le corps des réels.
- Démontrer que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.
- On note $A$ l'ensemble : $\{x \in \mathbb{Q}_+, x^2 \leq 2\}$, déterminer la borne supérieure de $A$. Qu'en déduisez vous sur l'ensemble des rationnels.
- L'ensemble des irrationnels $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ a t'il la propriété de borne supérieure ?
- Montrer que $\sqrt[3]{2}$ est irrationnel.

**Exercice 8** Montrer que l'intersection de deux intervalles est un intervalle (éventuellement vide). Que dire de l'intersection de deux intervalles ouverts, fermés ?

**Exercice 9** Soient $A$ et $B$ deux parties non vides de $\mathbb{R}$.
1) On suppose $A$ bornée et $B \subset A$. Comparer, $\sup A, \sup B, \inf A, \inf B$.

2) On suppose $A$ majorée, avec $\sup A > 0$, montrer que $A$ posséde un élément strictement positif.

On suppose $A$ et $B$ bornées, on note :

$$-A = \{-x; x \in A\} \tag{1}$$
$$A + B = \{x + y; x \in A, y \in B\} \tag{2}$$
$$a + A = \{a + x; x \in A\} \tag{3}$$
$$AB = \{xy, x \in A, y \in B\} \tag{4}$$

3) Montrer que $\sup(-A) = -\inf(A)$
4) Montrer que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$
5) Montrer que $\sup(a + A) = a + \sup(A)$
6) A t'on $\sup(AB) = \sup(A)\sup(B)$

**Exercice 10** Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ non vides et telles que : $\forall x \in A, \forall y \in B, x \leq y$.
a) Montrer l'existence de $\sup A$ et de $\inf B$.
b) Montrer que $\sup A \leq \inf B$.
c) Montrer que $\sup A = \inf B \iff \forall \epsilon > 0, \exists x \in A, \exists y \in B, |x - y| \leq \epsilon$.
d) Donner un exemple d'ensembles vérifiant c).

**Exercice 11** Soit $x$ un réel. On note $E$ la fonction partie entière.
1) Tracer la fonction $E$.
2) Démontrer que $x - 1 < E(x) \leq x$. Quelle est la limite de la fonction partie entière lorsque en $+\infty$.
3) Montrer que pour tout réel $x$ : $E(x + 1) = E(x) + 1$.
4) Montrer que la fonction $f : x \mapsto x - E(x)$ est périodique.
5) Montrer que pour tout réel $x$ et tout entier $n$ : $E(\frac{E[nx]}{n}) = E(x)$.
6) Montrer que $\frac{E[10^n x]}{10^n} \to x$. Conclure que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
7) On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des réels de la forme $y = \frac{k}{2^n}$, avec $k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$.
Montrer que $\mathcal{D} := \{\frac{k}{2^n}, k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$. $\mathcal{D}$ est appelé l'ensemble des nombres dyadiques. (On peut montrer que c'est un sous-groupe de $\mathbb{R}$ et utiliser l'exercice 18).

**Exercice 12** Soient $f$ et $g$ des fonctions réelles bornées, on désigne par $\sup f := \sup\{f(x); x \in \mathbb{R}\}$ et $\inf f := \inf\{f(x); x \in \mathbb{R}\}$. Démontrer que $\sup(f + g) \leq \sup f + \sup g$. Trouver des fonctions $f$ et $g$ pour lesquelles $\sup(f + g) < \sup f + \sup g$.

**Exercice 13** Etant donné $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'ensemble $A_n = \{k + \frac{n}{k} | k \in \mathbb{N}^*\}$.
1) Montrer que $\inf A_n = \inf\{k + \frac{n}{k} | 1 \leq k \leq n\}$
2) Montrer que $\inf A_n \geq \sqrt{4n}$

**Exercice 14** Soient $E = \{x \in \mathbb{R}$ tel que $\exists p, q \in \mathbb{Z}, x = p + q\sqrt{2}\}$ et $u = \sqrt{2} - 1$.
a- Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$ et pour tout $v \in E$, on a $nv \in E$.
b- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u^n \in E$.
c- Montrer que $0 < u < 1/2$ et en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $0 < u^n < 1/n$.
d- Soient $a$ et $b$ des nombres réels tels que $a < b$. Montrer qu'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $0 < u^n < b - a$. En déduire qu'il existe un élément de $E$ appartenant à l'intervalle $]\,a, b[$.
e-$^\star$ Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, il existe $p_n$, $q_n \in \mathbb{Z}$ tels que :

$$u^n = p_n + q_n\sqrt{2} \text{ avec } p_n q_n < 0.$$

En conclure que dans tout intervalle $]\,a, b[$ avec $a < b$, il existe une infinité d'irrationnels.

**Exercice 15** Dans la liste de propositions ci-dessous, certaines sont justes, d'autres fausses, à vous de trouver lesquelles et de justifier !
Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = x^4$.
A) 1) $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est une application surjective.
A) 2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une application injective
A) 3) $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est une application injective.
B) 1) $f^{-1}\big([-16, 16]\big) = [0, 2]$.
B) 2) $f^{-1}\big([-16, 16]\big) = [-1, 1]$.
B) 3) $f^{-1}\big([-16, 16]\big) = [-2, 2]$.
B) 4) $f^{-1}\big([0, 16]\big) = [0, 2]$.
C) 1) $f : [-1, 1] \to [0, 1]$ est bijective.
C) 2) $f : [0, 2] \to [0, 2]$ est bijective.
C) 3) $f : [0, 1] \to [0, 1]$ est bijective.
C) 4) $f : [0, 1] \to [0, 2]$ est bijective.
D) 1) La borne supérieure de $f^{-1}\big([0, 128]\big)$ est 4.
D) 2) La borne supérieure de $f^{-1}\big([-128, 128]\big)$ est 4.
D) 3) La borne inférieure de $f^{-1}\big([-128, 128]\big)$ est 0.
D) 4) Le plus grand élément de $f^{-1}\big([0, 128]\big)$ est 4.

**Exercice 16** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$f(x) = 2x^2 - 1 \text{ si } x \in ]-\infty, 1]$$
$$f(x) = -2 \text{ si } x \notin ]1, +\infty[.$$

a) Représenter graphiquement l'application $f$.
b) Déterminer l'image de $\mathbb{R}$ par $f$. Est-ce un intervalle de $\mathbb{R}$ ? Est-ce une partie minorée, resp. majorée, resp. bornée de $\mathbb{R}$ ?
c) L'application $f$ est-elle monotone ? Si oui, préciser son sens de monotonie.
d) L'application $f$ est-elle injective, resp. surjective, resp. bijective ?
e) Déterminer $A = f^{-1}(]-1, 1[)$.
f) Préciser si :
– $A$ est majorée, resp. minorée, resp. bornée ;
– $A$ admet un plus grand élément, resp. une borne supérieure, resp. un plus petit élément, resp. une borne inférieure.

**Exercice 17** 1) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{Z}$, résoudre $E[kx] = n$.
2) Soient $p$ et $x$ des nombres réels, établir $E[x + p] = E[x] + p \Longleftrightarrow p \in \mathbb{Z}$.
3) Montrer que pour tout entier naturel non nul, $n$ et tout réel $x$, on a l'égalité : $E[\frac{E[nx]}{n}] = E[x]$.

**Exercice 18** (***) Soit $H$ un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$. Alors $H$ vérifie l'une ou l'autre des assertions suivantes :
i) il existe $m \in \mathbb{R}^+$ tel que $H = m\mathbb{Z}$.
ii) Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha < \beta$, il existe $h \in H$ tel que $h \in ]\alpha, \beta[$.(remarque : cela signifie que $H$ est dense dans $\mathbb{R}$)

**Définition-Rappel :** Un sous-groupe $H$ de $(\mathbb{R}, +)$ est un sous-ensemble $H$ tel que :

1. $0 \in H$ 2. $\forall h, h' \in H, h + h' \in H$ 3. $\forall h \in H, -h \in H$

**Indication :** Considérer l'ensemble $H_1 = \{h \in H, h > 0\}$ et introduire le réel $a$ défini par $a = \inf_{h \in H_1} h$. (distinguer ensuite deux cas selon la valeur de $a = 0$ ou $a > 0$)

**Exercice 19** Soit $D$ un nombre rationnel strictement positif qui n'est pas le carré d'un nombre rationnel. Soit l'application $f$ de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Q}$ définie par :

$$f(x) = \frac{x(x^2 + 3D)}{3x^2 + D}.$$

- Montrer que $f$ est injective.
- Soient $A_1 = \{r \in \mathbb{Q}, r \leq D\}$ et $A_2 = \{r \in \mathbb{Q}, r \geq D\}$. On a $\mathbb{Q} = A_1 \cup A_2$. Montrer : $\forall x \in A_1, f(x) - x < 0$, $\forall x \in A_2, f(x) - x > 0$. En déduire que $\sup A_1 \notin A_1$, $\inf A_2 \notin A_2$ Le couple $(A_1, A_2)$ s'appelle une coupure de Dedekind.

**Exercice 20** $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

**Définition 1** – *Deux ensembles $E$ et $F$ sont dit équipotents si il existe une bijection de $E$ vers $F$.*
– *Soit $E$ une partie de $\mathbb{R}$, $E$ est dit dénombrable si il existe une bijection de $\mathbb{N}$ vers $E$.*

1) Soit $f : x \mapsto \tan(\pi x - \pi/2)$, montrer que $f$ est une fonction bijective de $]0, 1[$ dans $\mathbb{R}$. Que dire de $]0, 1[$ et $\mathbb{R}$ ?
2) Montrer que $]0, 1[$ est dénombrable si et seulement si $\mathbb{R}$ est dénombrable.
3) On va montrer que $]0, 1[$ n'est pas dénombrable. On raisonne par l'absurde : Supposons qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\{u_n, n \in \mathbb{N}\} = ]0, 1[$. On écrit le développement décimal de chaque terme :

$$u_n = 0, u_{n,1}u_{n,2}...u_{n,n}u_{n,n+1}...$$

Soit le réel $v = 0, \tilde{u}_{1,1}\tilde{u}_{2,2}...\tilde{u}_{n,n}...$ avec $\tilde{u}_{n,n} = u_{n,n}+1$ (modulo 10) de sorte que $9+1 = 10 = 0$. Montrer que le réel $v$ n'appartient pas à $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$. qu'en déduisez vous ?

La construction de l'élément $v$ s'appelle la construction par procédé diagonal. (on parle de la diagonale de Cantor).

## Problème

**Exercice 21** Morphismes croissants additifs de $\mathbb{R}$
Soit $f$ une fonction sur $\mathbb{R}$ non nulle telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

### Partie 1

On démontre dans cette partie que pour tout $x$ rationnel, $f(x) = f(1)x$.
1) Montrer que $f(0) = 0$, et que $f$ est une fonction impaire.
2) Montrer par récurrence : $\forall p \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(px) = pf(x)$.
3) Montrer que $\forall q \in \mathbb{N}^\star$, $f(\frac{1}{q}) = \frac{1}{q}f(1)$.
4) Montrer que $\forall x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = f(1)x$.

## Partie 2

On suppose maintenant que la **fonction $f$ est croissante**. On va démontrer la propriété suivante :

$$\mathcal{P} : \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(1)x.$$

On raisonne par l'absurde : **On suppose donc que** "non$\mathcal{P}$" **est vraie.**

5) Ecrire "non $\mathcal{P}$".
6) Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}^\star$ tel que $f(x) > f(1)x$.
7) Montrer que si $f(1) = 0$, alors $f(x) = 0$ (indication : considérer un entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \geq x$ et utiliser la croissance de $f$). Trouver l'absurdité.
8) Si $f(1) \neq 0$, justifier l'existence d'un rationnel $y$ tel que $x < y < \frac{f(x)}{f(1)}$, montrer en utilisant la croissance de $f$ que c'est absurde.
9) Conclure le raisonnement.

On se donne maintenant une fonction $g$ **croissante strictement positive** telle que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $g(x + y) = g(x)g(y)$.
Montrer en utilisant ce qui précède que $g$ est de la forme : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = e^{ax}$ pour un certain $a \in \mathbb{R}$ à expliciter.