Université Pierre et Marie Curie Année 2011/2012

LM115 MIME

TD 1: Rappels de Terminale et langage mathématique

L'objectif de cette feuille de td est d'apprendre à manier correctement les quantificateurs et connecteurs logiques. Tous les exercices font référence à des choses enseignées au lycée : nombres réels, suites, fonctions, etc.

Exercice 1 Etude des solutions de l'équation

$$e^{-x} = \frac{x-1}{x+1}, x \in \mathbb{R}.$$

Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{x-1}{x+1}e^x$.
1 Montrer que $f(x) = 1$ si et seulement si $e^{-x} = \frac{x-1}{x+1}$.
2 Etudier les variations de f sur $I = [0, \infty[$
3 Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet, dans I, une solution unique μ.
4 Soit x différent de 1 et de -1, calculer $f(x)f(-x)$. En déduire que l'équation admet deux solutions opposées.

Exercice 2 Rappeler la signification des symboles $\forall$, $\exists$, $\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$. En introduisant des notations, exprimer en langage mathématique les phrases suivantes :
1 Un nombre réel est ou positif ou négatif.
2 Un nombre réel est ou strictement positif ou négatif.
3 Un nombre réel est ou positif ou strictement négatif.
4 Tout nombre entier est pair ou impair.
5 Démontrer que le produit de deux entiers impairs est impair.
Lorsque cela un sens, placer les signes $\Longleftarrow, \Longrightarrow, \Longleftrightarrow$ entre les phrases mathématiques suivantes. Donner un contre-exemple lorsque l'implication est fausse.
a) $0 \leq \alpha \leq \beta \qquad \alpha^2 \leq \beta^2 \qquad (\alpha - \beta)(\alpha + \beta) \leq 0$
b) $0 \leq \alpha \leq \beta \qquad \sqrt{\alpha} \leq \sqrt{\beta}$
c) Soit α, β différents de 0, $\frac{1}{\alpha} \leq \frac{1}{\beta} \qquad \beta \geq \alpha$
d) $a \leq b$ et $x \leq y \qquad a - x \leq b - y$
e) $a \geq b$ et $x \geq y \qquad ax \geq by$

Exercice 3 On considère l'équation $\mathcal{E}$:

$$2\sqrt[3]{x} = x + 1$$

1) Trouver une solution entière de E.
2) Démontrer l'équivalence, pour tout x de $\mathbb{R}_+$:
$$2\sqrt[3]{x} = x + 1 \Longleftrightarrow (x - 1)(x^2 + 4x - 1) = 0.$$
3) En déduire les solutions de $\mathcal{E}$ dans $\mathbb{R}_+$.

Exercice 4 On considère l'équation $\mathcal{E}$:

$$x^3 + 3x - 2 = 0$$

– Justifier que $\mathcal{E}$ admet une seule solution dans $\mathbb{R}$. Cette solution sera notée α. Vérifier que le réel α est strictement compris entre 0 et 1.
– Le but de cette deuxième question est de calculer une valeur exacte de α.
a) Soient u et v des nombres réels.
Démontrer :

$$(u+v)^3 + 3(u+v) - 2 = u^3 + v^3 + 3(uv+1)(u+v) - 2$$

En déduire que si u et v vérifient le système Σ suivant :

$$\begin{aligned} u^3 + v^3 &= 2 \\ uv &= -1 \end{aligned}$$

alors $u+v$ est solution de l'équation $\mathcal{E}$
b) Démontrer pour tous réels u et v non nuls, l'équivalence suivante

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = 2 \\ uv = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} (u^3)^2 - 2u^3 - 1 = 0 \\ v = -\frac{1}{u} \end{cases}$$

c) En déduire des réels u et v qui satisfont Σ, puis la valeur de α.

Exercice 5 Traduire en langage logique les assertions suivantes :
1) L'ensemble E est inclus dans l'ensemble F.
2) L'ensemble E n'est pas inclus dans F.
3) E, F sont deux ensembles différents.
4) La fonction f est majorée, minorée, bornée.

Exercice 6 Soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux assertions portant sur x dénotant un nombre réel.
Montrer que $(P \Longrightarrow Q) \iff (\text{non } Q \Longrightarrow \text{non } P)$. (Lorsqu'on utilise, ce raisonnement on parle de *contraposée*)
Montrer que $[(\text{non } P \Longrightarrow Q) \text{ et } (\text{non } P \Longrightarrow \text{non } Q)] \iff P$. (Lorsqu'on utilise, ce raisonnement on parle de *raisonnement par l'absurde*)

Exercice 7 1. Montrer que l'assertion suivante est fausse : $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n + 3^n$ est premier.
2. Montrer, par l'absurde, que l'ensemble des nombres premiers est infini. (*)

Exercice 8 On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E, on suppose que E a au moins deux éléments. Démontrer que l'assertion suivante est fausse :

$$\forall A \subset E, \forall B \subset E, \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B).$$

On se donne une fonction f de E dans E, et $F \subset E$ On note $f^{-1}(F) := \{x \in E; f(x) \in F\}$.
Montrer que $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$. $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.
Attention, le symbole f^{-1} n'a pas de sens en général, en particulier on ne peut pas parler de la fonction f^{-1} sans une propriété de bijectivité pour la fonction f.

Exercice 9 Soient $p(x)$, $q(x)$ deux assertions pour $x \in \mathbb{R}$, on note $A = \{x, p(x) \text{ vraie}\}$ et $B = \{x, q(x) \text{ vraie}\}$. Ecrire avec des quantificateurs les assertions suivantes : :
– $A = \emptyset$
– $A \subset B$

– $A = B$
– $A \cap B^c = A$
– $A \cap B \neq \emptyset$
On pose $p(x) =$ "x est entier" et $q(x) =$ "x est rationnel", donner dans ce cas les relations entre les ensembles A et B.

Exercice 10 On se donne $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Traduire avec des quantificateurs les phrases suivantes :
1) Il existe un terme de la suite $(u_n, n \geq 0)$ non-nul.
2) A partir d'un certain rang, tous les termes de la suite $(u_n, n \geq 0)$ sont nuls.
3) Tout réel a un antécédent par la fonction f.
4) Tout réel a une image par la fonction f
5) La fonction f est une fonction constante.
6) Pour tout quantité A positive, il existe un rang à partir duquel les termes de la suite $(u_n, n \geq 0)$ sont plus grands que A.
7) Il existe un réel l tel que pour toute quantité ϵ strictement positive, il existe un certain rang à partir duquel tous les termes de la suite $(u_n, n \geq 0)$ sont dans l'intervalle $[l - \epsilon, l + \epsilon]$.

Exercice 11 Ecrire les négations des propositions suivantes :
a) $\forall x \in E, \forall x' \in E, x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f(x')$
b) $\forall x_0 \in]a, b[, \forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, |x - x_0| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$
c) $\forall A > 0, \exists n_0, \forall n : n \geq n_0 \Longrightarrow u_n \geq A$
e) En vous donnant une fonction et une suite, illustrer graphiquement les assertions b) et c).

Exercice 12 Trouver toutes les applications f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que :

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, f(m + n) = f(m) + f(n)$$

Considerer $f(1)$ et raisonner par récurrence.

Exercice 13 Donner la contraposée des implications suivantes :

1. n est premier $\Rightarrow n = 2$ ou n est impair.
2. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, f' est une fonction positive sur $\mathbb{R}$ donc f est croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 14 Soit $f : \mathbb{R} \to$ la fonction définie par $f(x) = x \cos x$. Calculer $f(n\pi)$. La fonction f est-elle majorée ? Est-elle minorée ?

Exercice 15 Montrer que :
1) $2^n > n$
2) $a^{n+1} - b^{n+1} = (a - b) \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$
3) $\forall q \in \mathbb{R}/\{1\}, \sum_{k=0}^{n} q^k := 1 + q + ... + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ (à connaître par coeur)
4) $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ (à connaître par coeur)

Exercice 16 Donner la définition d'un nombre rationnel.

Exercice 17 Soit la suite définie par : $S_n = 0,999999$ avec exactement n chiffres 9 après la virgule.

1) Ecrire S_n avec le signe $\sum$
2) Montrer que (S_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 18 L'objectif de l'exercice est d'obtenir l'encadrement polynomial suivant de la fonction cosinus :

$$\forall x \in [-\pi/2;\pi/2], 1-\frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}.$$

On notera f la fonction $x \mapsto 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\cos(x)$.
1) Déterminer les dérivées successives $f', f'', f^{(3)}$ et $f^{(4)}$ de f. Quelle remarque peut-on faire sur les valeurs prises en 0 par f et ses dérivées d'ordre 1 à 4.
2) Compléter un tableau du type :
3) Déduire de la question précédente l'encadrement souhaité.

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
signe de $f^{(4)}(x)$			
sens de variation de $f^{(3)}$			
sens de variation de f			
signe de $f(x)$			

Figure 1 – Tableau de variation

Exercice 19 (*) En vous inspirant de la méthode de l'exercice précédent, montrer par récurrence sur n, l'inégalité suivante :

$$\forall x \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \leq e^x$$

On pose $f_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$, montrer que $f_n(x)$ converge vers une limite $l(x) \leq e^x$. En fait, on a l'égalité $\forall x \in \mathbb{R}, l(x) = e^x$.

Exercice 20 Soit $f : X \to Y$ une application. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

1. f est injective.
2. $\forall A, B \subset X,\ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
3. $\forall A, B \subset X,\ A \cap B = \emptyset \Rightarrow f(A) \cap f(B) = \emptyset$.

Exercice 21 Soient E, F, G trois ensembles non vides et des fonctions $f : E \mapsto F$, $g : F \mapsto G$.

1. Montrer que si $g \circ f$ est injective alors f est injective.
2. Montrer que si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.

Exercice 22 Ecrire les implications ou équivalences correctes :
1 $[\forall x \in E : p(x)$ est vraie et $q(x)$ est vraie$]$ ....$[\forall x \in E : p(x)$ est vraie$]$ et $[\forall x \in E, q(x)$ est vraie$]$

2 [$\exists x \in E : p(x)$ est vraie et $q(x)$ est vraie]....[$\exists x \in E : p(x)$ est vraie] et [$\exists x \in E, q(x)$ est vraie]
3 [$\forall x \in E : p(x)$ est vraie ou $q(x)$ est vraie]....[$\forall x \in E : p(x)$ est vraie] ou [$\forall x \in E, q(x)$ est vraie]
4 [$\exists x \in E : p(x)$ ou $q(x)$ est vraie]....[$\exists x \in E : p(x)$ est vraie] ou [$\exists x \in E, q(x)$ est vraie]

Problème à rédiger

Le but du problème est d'étudier dans un premier temps la fonction f définie sur $[0, \infty[$ par

$$f : x \mapsto x \ln\left(\tfrac{x+2}{x}\right) + \tfrac{x}{4} + \tfrac{1}{2} \text{ et } f(0) = \tfrac{1}{2}$$

Partie A

I- Etude d'une fonction auxiliaire. Soit

$$g : x \in]0, \infty[\mapsto \ln(x+2) - \ln(x) - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{4}.$$

- a) Etudier le sens de variation de g.
- b) Déterminer la limite (sans oublier de justifier son existence) de g en $+\infty$.
- c) En déduire le signe du réel $g(x)$, quand x parcourt $]0, +\infty[$.
- d) Montrer que pour tout x dans l'intervalle $[2, 3]$, $g(x) < 1/2$.

II-
- Démontrer que f est continue en $x = 0$. Poser $x = 1/t$, et étudier la limite de $x \ln(\frac{x+2}{x})$ lorsque x tend vers 0 (donc lorsque $t \longrightarrow \infty$.)
- La fonction f est-elle dérivable en 0 ?
- Montrer que $f' = g$ et étudier le sens de variation de f.
- Montrer que $x \ln(\frac{x+2}{x}) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \infty$. Utiliser le résultat (à connaître par coeur) $\lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$. En déduire la limite de f en $+\infty$.

Partie B

Dans cette partie, on désigne par I l'intervalle $[2, 3]$.

I-
- Soit h la fonction définie sur I par $h(x) = f(x) - x$. Montrer que pour tout $x \in I$, $h'(x) < 0$. (On remarquera que $h'(x) = g'(x) - 1$)).
- En déduire le sens de variation de h. Montrer que m'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution dans I. On note α cette solution.

II- II-1 Montrer que pour tout $x \in I$, $0 < f'(x) < \frac{1}{2}$.
II-2 Montrer en utilisant le théorème des accroissements finis (à connaître par coeur) que pour tout $x \in I$, $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$.

III- On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = 2$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$ (pour le démontrer voir dans le cours la notion d'intervalle stable).
a) Etablir les inégalités suivantes :

Pour tout n de $\mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

Pour tout n de $\mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Quelle est sa limite ?