DM 3

Exercice 1 Autour de l'uniforme continuité.

Soit une fonction f uniformément continue définie sur $\mathbb{R}$. Nous allons montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ tels que : pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$|f(x)| \leq a|x| + b.$$

1) Rappeler la définition d'une fonction uniformément continue. En déduire qu'il existe $\delta > 0$ tel que :
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, |x - y| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq 1$$
2) Montrer que $|f(\delta)| \leq 1 + |f(0)|$
3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|f(n\delta) - f((n-1)\delta))| \leq 1$.
4) Montrer par récurrence, en utilisant 2) et 3) que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f(n\delta)| \leq n + |f(0)|$
5) Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que $x \in [n\delta, (n+1)\delta[$ avec $n = E[\frac{x}{\delta}]$. En déduire que $|f(x) - f(n\delta)| \leq 1$, puis que $|f(x)| \leq 1 + n + |f(0)|$.
6) Déduire de la question 5) que pour tout x, $|f(x)| \leq \frac{1}{\delta}|x| + 1 + |f(0)|$. Donner les a et b correspondants.
7) Que pensez vous des fonctions polynômiales de degré supérieur ou égale à 2 ? Sont elles uniformément continues ?
8) Soit $g(x) = \sin\left(\frac{\pi x^2}{2}\right)$. Justifier que g est continue et bornée. Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que $f(\sqrt{4n+1}) - f(\sqrt{4n}) = 1$.
9) Ecrire à l'aide des quantificateurs : "g n'est pas uniformément continue". Montrer que g n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$ à l'aide de la question 8.

Exercice 2 Fonctions continues et périodiques.

Soit f une fonction continue. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des périodes de f i.e

$$\mathcal{P} := \{a \in \mathbb{R} | \forall x \in \mathbb{R}, f(x + a) = f(x)\}$$

Supposons que 1 et $\sqrt{3}$ sont des périodes de f.
1) Soit $E = \{n + p\sqrt{3}; n \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{Z}\}$, montrer que $E \subset \mathcal{P}$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}, e \in E$, $ke \in E$.
2) Soit $u = \sqrt{3} - 1$, montrer que $u^n \in E$.
3) Soit $x \in \mathbb{R}$, soit $n \in \mathbb{N}$, $x_n = E[\frac{x}{u^n}]u^n$. Montrer que pour tout n, $x_n \in E$ et que $x_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} x$. En déduire que E est dense dans $\mathbb{R}$.
4) En déduire que $\mathcal{P}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
5) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(0)$.

6) Déduire de la question 5), que toute fonction continue avec périodes 1 et $\sqrt{3}$ est constante.

Exercice 3 Calculs et suites d'intégrales.

1) Soit $g : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ une application continue. Citer un théorème du cours montrant que g est bornée sur $[0,1]$ et justifier l'existence de l'intégrale :

$$I_n = \int_0^1 e^{-nx} g(x) dx.$$

2) Calculs : calculer I_0 lorsque g est définie par :
   a) $g(x) = xe^{-x}$
   b) $g(x) = \frac{\arctan(x)}{1+x^2}$
   c) $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$, indication : utiliser le changement de variables : $x = 2\sin^2(u)$

3) On revient au cas général : soit M une borne de g, c'est à dire un réel tel que pour tout $x \in [0,1], |g(x)| \leq M$. Montrer que pour tout $n \geq 1$:

$$|I_n| \leq \frac{M}{n}.$$

   En déduire que I_n est convergente et déterminer sa limite.

4) Soit maintenant $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 (dérivable, avec dérivée continue) telle que $f(0) = 1$.
   Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$J_n = n \int_0^1 e^{-nx} f(x) dx.$$

   Montrer que la suite $(J_n)_{n \geq 1}$ est convergente et déterminer sa limite.