DM 2

La clarté de la rédaction est primordiale, faites attention à bien rédiger les récurrences et n'hésitez pas à admettre certaines questions pour traiter les suivantes...

Exercice 1 Autour d'une somme.

Soit $a \in]0, \infty[$, on va étudier la suite définie par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{a^k}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

– Montrer par récurrence la propriété suivante :

$$\forall a \in \mathbb{R} - \{0,1\}, \forall n \in \mathbb{N}^\star \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{a^k} = \frac{a^{n+1} - (n+1)a + n}{(a-1)^2 a^n}.$$

– Lorsque $a = 1$, que vaut u_n et comment se comporte la suite quand n tend vers $+\infty$?
– Déterminer le comportement de (u_n) quand n tend vers $+\infty$ pour $a \in]0, 1[$.
– Déterminer le comportement de (u_n) quand n tend vers $+\infty$ pour $a \in]1, \infty[$.

Exercice 2 Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = f(1)$.
Soit g la fonction définie par :

$$g(x) = \begin{cases} f(2x) & si \quad x \in [0, \frac{1}{2}[\\ f(2x-1) & si \quad x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Montrer que g est continue.

Exercice 3 Soit $(u_n)_{n\geq 0}$, définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{2}{u_n}$.
1) Démontrer que $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.
2) Soit (v_n) la suite définie par $v_n = \frac{u_n^2}{4}$. Montrer que pour tout n entier, $v_{n+1} - v_n \geq 1$, en déduire que $v_n \geq n$.
3) Montrer que $v_{n+1} \leq v_n + 1 + \frac{1}{u_n^2}$. En déduire, $v_{n+1} - v_n \leq 1 + \frac{1}{4n}$. Montrer l'inégalité $\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t} dt$ et en déduire que $v_n \leq v_2 + n + \frac{1}{4} \ln(n-1)$.
4) En déduire que $\frac{v_n}{n} \underset{n\to\infty}{\to} 1$.

Exercice 4 Soit f une fonction continue en 0 telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = f(x).$$

1) Montrer que $f(x) = f(\frac{x}{2^k})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

2) En déduire que $f(x) = f(0)$ pour tout x.

Exercice 5 Lemme de Toepliz

Soit un réel $b > 1$ et $(a_k)_{k\geq 0}$ une suite convergente, on notera a sa limite.

– Calculer $\sum_{k=0}^{n} b^k$, en déduire que $\sum_{k=0}^{n} b^k \underset{n\to\infty}{\to} \infty$.

– Montrer que
$$\frac{1}{\sum_{k=0}^{n} b^k} \sum_{k=0}^{n} b^k a_k \underset{n\to\infty}{\to} a.$$

Indication : Penser à la preuve du théorème de Césaro.

– En déduire que
$$\frac{1}{b^n} \sum_{k=0}^{n} b^k a_k \underset{n\to\infty}{\to} \frac{ab}{b-1}.$$